Universidade Federal do ABC
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas
Curso de Graduação em Engenharia de Informação

Simulação de um sistema de comunicação MIMO não coerente

Victor Magalhães Muniz

Santo André - SP

2022

Victor Magalhães Muniz

Simulação de um sistema de comunicação MIMO não coerente

Monografia apresentada ao curso de graduação em Engenharia de Informação da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Informação

Universidade Federal do ABC – UFABC

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas

Curso de Graduação em Engenharia de Informação

Orientador: Prof. Dr. Claudio José Bordin Júnior

Santo André - SP

2022

Victor Magalhães Muniz
Simulação de um sistema de comunicação MIMO não coerente/ Victor Magalhães Muniz. – Santo André - SP, 2022
15 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Claudio José Bordin Júnior

Monografia – Universidade Federal do ABC – UFABC
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas
Curso de Graduação em Engenharia de Informação, 2022.

1. Sistema MIMO não coerente. 2. Grassmann Manifold. I. Prof. Dr. Claudio José Bordin Júnior. II. Universidade Federal do ABC. III. Simulação de sistema MIMO não coerente. CDU 02:141:005.7

Resumo

Analisa-se nesta monografia um sistema comunicação MIMO não coerente num canal sujeito a desvanecimento plano. Tal sistema não necessita da transmissão de sinais de referência (piloto), pois opera sem o conhecimento dos coeficientes do canal. Para tanto, os símbolos transmitidos são modelados por matrizes, formadas por amostras transmitidas por múltiplas antenas (linhas) em múltiplos instantes de tempo (colunas), que geram diferentes subespaços (pontos da variedade de Grassmann). Avaliou-se o desempenho do sistema através de simulações numéricas, para constelações de diferentes ordens e calculadas através de diferentes algoritmos, a partir das quais constatou-se que o desempenho do método incoerente só é competitivo com o de algoritmos coerentes quando os coeficientes do canal utilizados pelos últimos possuem um erro significativo.

Palavras-chaves: MIMO, Comunicação não coerente, Variedade de Grassmann.

Lista de abreviaturas e siglas

CSI	Channel State Information
MIMO	Multiple Input Multiple Output
DAB	European Digital Audio Broadcasting
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
OFDM	Orthogonal Frequency Division Muliplexing
GM	Grasmann Manifold
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SER	Symbol Error Rate
SVD	Singular Value Decomposition
STBC	Space Time Block Code

Sumário

1 INTRODUÇÃO 1

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 3

2.1 Determinação da Constelação através de um Algoritmo *Greedy* . . 4

2.2 Modelo de *alternating projections* 4

3 RESULTADOS E ANÁLISES 8

4 CONCLUSÃO 13

REFERÊNCIAS 14

APÊNDICE A – CÓDIGO-FONTE DAS SIMULAÇÕES 15

1 Introdução

Um sistema de comunicação não coerente é definido como aquele em que nem o transmissor nem o receptor têm conhecimento do estado do canal (*Channel State Information* - CSI), fazendo com que não seja necessário estimá-lo. Neste trabalho, considera-se um sistema de comunicação não coerente operando num canal MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*), formado pelo uso de múltiplas antenas de transmissão e de recepção (GOHARY; DAVIDSON, 2009), sujeito a desvanecimento plano e cujos coeficientes são admitidos como constantes durante a duração de um bloco de T amostras do sinal transmitido.

A detecção não coerente é um tópico clássico na teoria de comunicação. O desenvolvimento de sistemas de comunicação MIMO não coerente, porém, é recente. Sistemas não coerentes não necessitam do envio de sinais de referência (piloto) para auxiliar na estimação dos coeficientes do canal, o que é uma vantagem em relação aos sistemas coerentes, uma vez que o envio periódico de pilotos reduz a quantidade de informação útil transmitida para uma mesma largura de banda disponível.

A busca pela eficiência nos esquemas de modulação codificada não coerente tem recebido grande interesse devido ao seu possível uso em futuros sistemas de comunicação sem fio a altas taxas, com múltiplas antenas (WARRIER; MADHOW, 2002), tendo o seu uso sido considerado em sistemas 5G (FANJUL et al., 2017). A maioria dos sistemas de comunicação sem fio práticos requer a estimação da CSI pelo receptor. Um exemplo de sistema que utiliza detecção não coerente é o DAB (*European Digital Audio Broadcasting*), que é um padrão de rádio digital baseado em OFDM (*Orthogonal Frequency-Division Muliplexing*) com modulação 4-PSK (Phase Shift Keying) diferencial nas sub portadoras (WARRIER; MADHOW, 2002). Ao utilizar modulação diferencial, o sistema DAB pode funcionar sem a necessidade de algoritmos de estimação da CSI, o que simplifica e robustece os receptores.

O uso de múltiplas antenas no transmissor e no receptor (MIMO) permite atingir capacidades elevadas em sistemas de comunicação sem fio. Mostra-se que a capacidade ergódica de um sistema MIMO é proporcional a $\min(M, N)$, em que é M e N são, respectivamente, o número de antenas no transmissor e no receptor, sob a hipótese de que os coeficientes do canal sejam independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) (ZHENG; TSE, 2002). Essa capacidade, porém, é afetada caso a CSI (WANG; EVANS, 2006) não seja perfeitamente estimada.

O sistema de comunicação MIMO não coerente considerado nesta monografia utiliza uma forma particular de codificação espaço-temporal mais bem explicada à frente. Neste sistema, os símbolos transmitidos são matrizes de M linhas e T colunas, em que T é

o número de amostras transmitidas em *slots* de tempo consecutivos. Matematicamente, a comunicação não coerente é possível se os símbolos transmitidos gerarem subespaços distintos. Isto ocorre porque (na ausência de ruído) o sinal recebido, que é uma matriz calculada como a multiplicação de uma matriz (suposta não singular) com coeficientes desconhecidos (canal MIMO), pela matriz do símbolo transmitido, gerará o mesmo subespaço que a matriz do sinal recebido. Uma constelação adequada para uso num sistema de comunicação MIMO não coerente, portanto, será formada por pontos distintos da variedade de Grassmann (*Grassmann manifold*), definida como o conjunto de subespaços de dimensão $K \leq min(M, T)$ gerado por matrizes de dimensão M por T (GOHARY; DAVIDSON, 2009).

Em (FANJUL et al., 2017), comparou-se o desempenho de um sistema MIMO não coerente ao de sistemas coerentes em um contexto prático, com a utilização de um sistema completo de comunicação com múltiplas antenas. Neste trabalho, faz-se a mesma comparação através de simulações numéricas, utilizando dados sintéticos.

O texto a seguir está organizado da seguinte forma: na Seção 2, apresenta-se a fundamentação teórica. Na Seção 3, por sua vez, são apresentados os resultados de simulações numéricas. Finalmente, na Seção 4, são relatadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 Fundamentação teórica

Denotando por $\mathbf{Y}$, uma matriz complexa de dimensão $N \times T$, o sinal recebido pelo sistema de comunicação considerado, utilizando N antenas ao longo de T *slots* de tempo, pode-se escrever (ZHENG; TSE, 2002):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{W}, \tag{2.1}$$

em que $\mathbf{H}$, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{W}$ são, respectivamente, as matrizes de coeficientes do canal (dimensão $N \times M$), o sinal transmitido ($M \times T$) e o ruído aditivo ($N \times T$). A matriz $\mathbf{H}$ é formada pelos elementos h_{ij} que representam os ganhos entre a antena de transmissão i e a de recepção j (Figura 1). Esses elementos possui uma distribuição *a priori* gaussiana complexa circular de média nula, variância unitária e são supostos independentes entre si. A matriz $\mathbf{W}$, por sua vez, é um ruído aditivo de média nula e variância σ^2, também com entradas independentes entre si.

Para o modelo de sinal dado pela Equação 2.1, a estimativa de máxima verossimilhança do símbolo transmitido dado o sinal recebido, com $\mathbf{H}$ desconhecido e com distribuição *a priori* Gaussiana, pode ser calculada como (FANJUL et al., 2017)

$$\hat{X}_i = \arg\max_{X_j \in \mathcal{X}} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X_j^H}\boldsymbol{X_j}\boldsymbol{Y^H}), \tag{2.2}$$

em que $\mathcal{X}$ denota o conjunto de todos os símbolos X_j (constelação), $(\cdot)^H$ representa o conjugado transposto de uma matriz e $Tr(\cdot)$, o traço de uma matriz (soma dos elementos da diagonal principal).

Mostra-se que a constelação $\mathcal{X}$ que minimiza a taxa de erro de símbolo (SER - *Symbol Error Rate*) ao se utilizar o método de detecção da Equação 2.2 é formada por pontos equidistantes da variedade de Grassmann[1] (GOHARY; DAVIDSON, 2009). A determinação da constelação ótima, assim, envolve a solução de um problema de empacotamento de esferas (*sphere packing*) na variedade de Grassmann. Este problema consiste na tentativa de encaixar os pontos da constelação de forma equidistante, o que equivale a preencher a variedade com esferas de mesmo raio e não sobrepostas, conforme ilustrado na Figura 2. Infelizmente, a solução deste problema, para constelações de tamanho prático (acima de dezenas de pontos) sofre com dificuldades numéricas, o que levou ao desenvolvimento de soluções alternativas, descritas a seguir.

[1] Qualquer matriz ortonormal representa um ponto da variedade de Grassmann. Observe, porém, que duas matrizes A e B são o mesmo ponto da variedade de Grassmann se suas colunas gerarem o mesmo subespaço. Assim, há infinitas representações para um mesmo ponto dessa variedade.

2.1 Determinação da Constelação através de um Algoritmo *Greedy*

O método *greedy* (GOHARY; DAVIDSON, 2009) determina uma constelação $\mathcal{X}$ formada por um conjunto de pontos $\{X_1, X_2, ...\}$ da variedade de Grassmann sequencialmente, como a seguir.

Inicialmente, determina-se X_1 como um ponto arbitrário da variedade de Grassmann. Para isto, gera-se uma matriz aleatória de dimensão $M \times T$ com entradas Gaussianas independentes, calcula-se a sua decomposição em valores singulares $\boldsymbol{U\Sigma V^H}$ e faz-se $X_1 = [\boldsymbol{U}]_{\boldsymbol{1:K}}[\boldsymbol{V}]^{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{1:K}}$, em que $[\cdot]_{\boldsymbol{1:K}}$ denota uma matriz formada pelas K primeiras colunas do argumento.

Os pontos seguintes são determinados resolvendo-se o problema de otimização

$$X_i = \arg \max_{X:X^H X=I} \min_{X_j, j<i} d(X, X_j), \tag{2.3}$$

em que $d(X, X_j)$ denota a distância entre os dois pontos da variedade de Grassmann.

Observe que um ponto X_i determinado desta forma, tem a máxima distância mínima em relação a todos os pontos determinados anteriormente; isto leva a uma solução diferente da ótima (em que todos os pontos têm a mesma distância entre si), gerando constelações mais sensíveis ao ruído, pois os últimos pontos assim determinados tendem a ser mais próximos entre si.

Utilizando uma definição particular para a distância (GOHARY; DAVIDSON, 2009), a Equação 2.3 pode ser reescrita como

$$X_i = \arg \min_{X:X^H X=I} \max_{X_j, j<i} \mathrm{Tr}(\Sigma_{X^H X_j}), \tag{2.4}$$

em que $\boldsymbol{\Sigma_{X^H X_j}}$é uma matriz, cuja diagonal contém os valores singulares de $\boldsymbol{X^H X_j}$.

Neste trabalho, uma solução aproximada para a Equação 2.4 foi determinada através do método de Monte Carlo, no qual matrizes candidatas para a solução eram amostradas como feito para X_1. A Figura 3, extraída de (GOHARY; DAVIDSON, 2009), ilustra a comparação do desempenho de uma sistema de comunicação MIMO não coerente usando constelações geradas pelo algoritmo *greedy* e pelo método ótimo (chamado de *direct design*) com M = 2, T = 4 e N = 2, para constelações de 16 pontos. Como se vê, o desempenho do sistema que usa a constelação subótima gerada pelo algoritmo *greedy* é pior, especialmente para SNRs elevadas, devido à não uniformidade da distância entre os pontos da constelação.

2.2 Modelo de *alternating projections*

O método de *alternating projections* (DHILLON et al., 2008) aproxima a solução do problema de *sphere packing* de forma mais sofisticada. O algoritmo se baseia no fato de

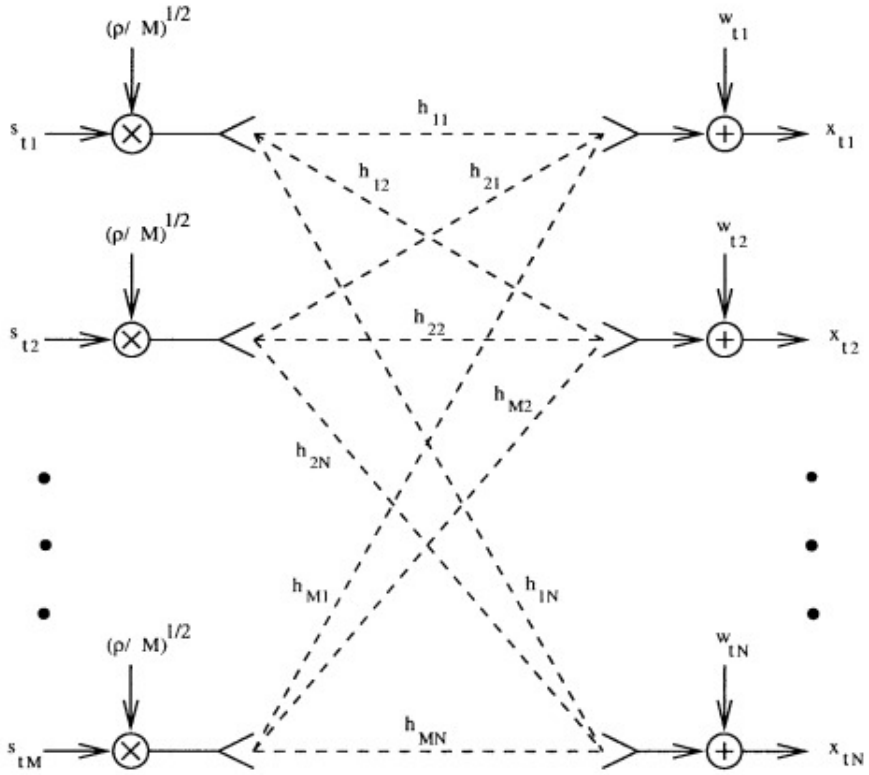

Figura 1 – Conexão sem fio entre as M antenas transmissoras e as N receptoras (HOCHWALD et al., 2000)

que a solução ótima do problema de *sphere packing*, usando a distância cordal, definida por

$$d_{cord}(\boldsymbol{X_m}, \boldsymbol{X_n}) = [K - ||\boldsymbol{X_m^*}\boldsymbol{X_n}||_F]^{1/2}, \tag{2.5}$$

é tal que a matriz Grammiana $\mathbf{G}$, formada pelos blocos $\boldsymbol{G_{ij}} = \boldsymbol{X_i^H}\boldsymbol{X_j}$, tem as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{G}$ é Hermitiana.
2. Os blocos da diagonal de $\mathbf{G}$ são matrizes identidade.
3. $||\boldsymbol{G_{ij}}||_F \leq \sqrt{K - \rho^2}$ para $i \neq j$, em que $\mathbf{K} = \mathbf{M}$, ρ é a distância cordal mínima entre os símbolos e $|| \cdot ||_F$ denota a norma de Frobenius de uma matriz.
4. $\mathbf{G}$ é positiva-definida.
5. $\mathbf{G}$ tem posto menor ou igual a distância $\mathrm{d} = \min(M, T)$.
6. $\mathbf{G}$ tem traço KC, em que C denota o número de símbolos da constelação.

O algoritmo, então, parte de uma constelação inicial determinada pelo algoritmo *greedy*, por exemplo, constrói a matriz $\mathbf{G}$ e impõe as propriedades (1)-(6) em sequência. Com isso, espera-se obter uma nova constelação com propriedades mais próximas da ótima. Os passos do algoritmo são os seguintes:

1. Inicializar $t \leftarrow 0$.
2. Determinar a matriz $\boldsymbol{H}^{(t)}$ que soluciona $\min_{H \in \mathcal{H}} ||\boldsymbol{H} - \boldsymbol{G}^{(t)}||_F$, em que $\mathcal{H}$ denota o conjunto das matrizes Hermitianas.
3. Determinar a matriz $\boldsymbol{G}^{(t+1)}$ que soluciona a equação $\min_{G \in \mathcal{G}} ||\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}^{(t)}||_F$, em que $\mathcal{G}$ denota o conjunto das matrizes de posto menor ou igual a d e traço KC.
4. Incrementar t.
5. Se $t < t_{max}$, retornar a etapa 2.
6. Definir a matriz diagonal por bloco $\mathbf{D} = \text{diag}(\boldsymbol{G}^{(t_{max})})$.
7. Retornar a matriz $\boldsymbol{G_{out}} = \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{G}^{(t_{max})}\boldsymbol{D}^{-1/2}$.
8. Calcular a matriz $\boldsymbol{\mathfrak{X}} = [X_1\ X_2 \ldots X_C]$ como a fatoração $\boldsymbol{\mathfrak{X}}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{G_{out}}$.

A solução dos problemas de otimização dos passos 2 e 3 é descrita em (DHILLON et al., 2008).

Figura 2 – Modelo de *sphere packing* no canal MIMO não coerente (ZHENG; TSE, 2002)

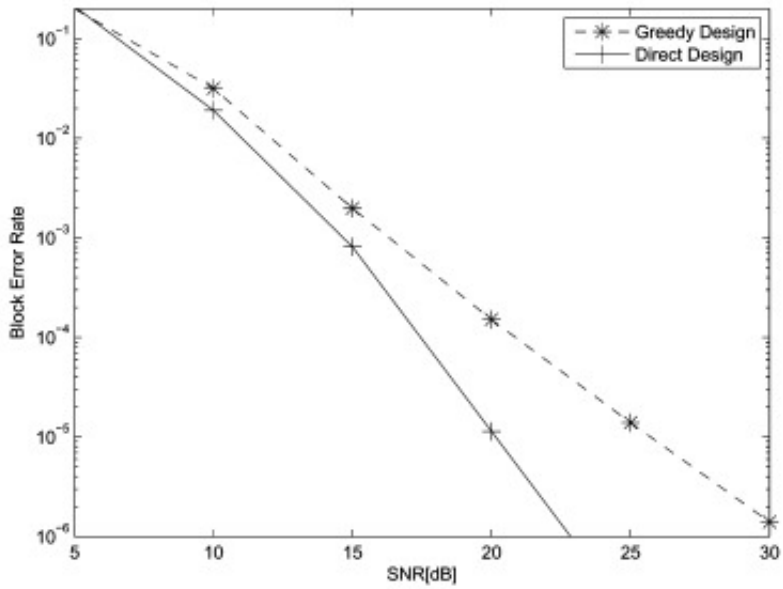

Figura 3 – Comparação entre o *direct design* e o *greedy design* (GOHARY; DAVIDSON, 2009)

3 Resultados e análises

Nesta seção, apresentam-se os resultados de simulações numéricas nas quais foi avaliado o desempenho de um sistema de comunicação MIMO incoerente em termos da taxa de erro de símbolo em função da variância das entradas da matriz de ruído aditivo σ^2. Utilizou-se um sistema com $K = M = N = d = 3$ e $T = 4$.

As Figuras 4 e 5 exibem o desempenho de um sistema de comunicação MIMO incoerente em função da variância do ruído utilizando constelações de diferentes ordens C, determinadas através do método descrito na Seção 2.1 utilizando, respectivamente, 10^5 e 10^6 amostras para a aproximação da solução da Equação 2.4. Como se pode observar, o desempenho é semelhante em ambos os casos e se degrada ao aumentar a ordem das constelações. Isto é esperado, pois tal aumento de ordem reduz a distância entre os subespaços que caracterizam os pontos das constelações, tornando a informação mais suscetível ao ruído.

Por comparação, a Figura 6 exibe o desempenho de um sistema de comunicação MIMO em função da variância do ruído para constelações de diferentes ordens C, determinadas através do método descrito na Seção 2.1, supondo agora a CSI perfeitamente conhecida pelo receptor. Neste caso, o argumento da otimização da Equação 2.2 é substituído por $||\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{X_j}||_F$. Como se pode observar, o desempenho nesta situação,

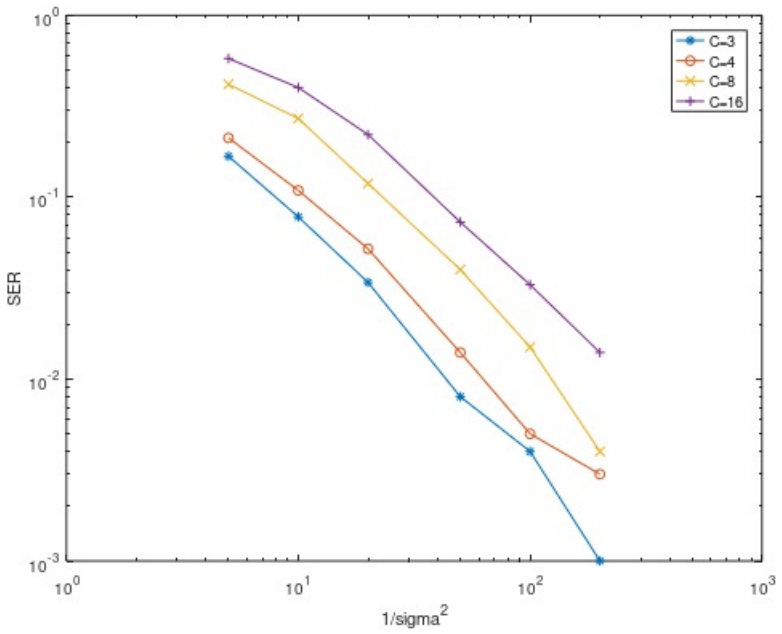

Figura 4 – Desempenho de um sistema de comunicação MIMO incoerente em função de σ^2 (variância do ruído) para constelações de diferentes ordens C determinadas através do método descrito na seção 2.1, que foram geradas com 10^5 realizações do algoritmo para definir o alfabeto de símbolos.

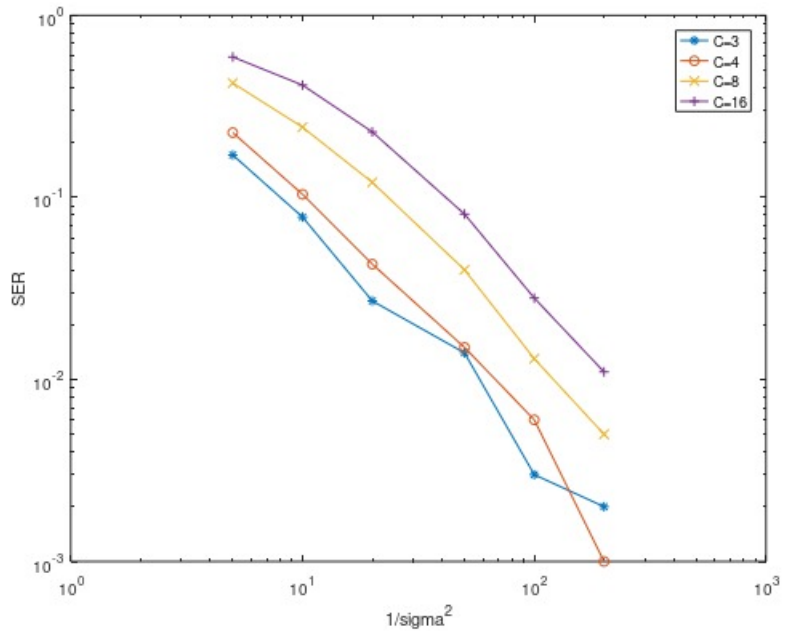

Figura 5 – Desempenho de um sistema de comunicação MIMO incoerente em função de σ^2 (variância do ruído) para constelações de diferentes ordens C determinadas através do método descrito na seção 2.1, que foram geradas com 10^6 realizações do algoritmo para definir o alfabeto de símbolos.

irrealizável na prática, é bastante superior ao da configuração incoerente.

Na Figura 7, mostra o desempenho obtido ao se realizar a demodulação coerente, utilizando, porém, uma estimativa perturbada da matriz H definida como

$$\boldsymbol{H_{err}} = \mathbf{H}\sqrt{1-\epsilon^2} + \epsilon\boldsymbol{\Delta}, \tag{3.1}$$

em que $\boldsymbol{\Delta}$ é uma matriz com entradas Gaussianas de média nula e variância unitária e ϵ foi fixado em 0,25; esta formulação reduz a correlação entre $\boldsymbol{H}_err$ e $\boldsymbol{H}$, mas mantendo a mesma variância para ambas. Como se pode observar, o desempenho se degrada fortemente, tornando-se pior que o observado para a modulação incoerente.

Por comparação, simulou-se também o desempenho do código espaço-temporal (STBC) de (TAROKH; JAFARKHANI; CALDERBANK, 1999), com taxa 3/4, $M = N = 4$ e $T = 3$, usando modulação binária. Nessa configuração, cada palavra STBC representa 9 bits, o que equivaleria a uma constelação incoerente com $C = 512$ pontos (que não foi simulada por requerer um tempo de computação excessivo). Como se pode observar na Figura 8, o desempenho é bastante superior ao da modulação incoerente. Ao se utilizar uma estimativa perturbada da matriz $\mathbf{H}$ (Figura 9), porém, o desempenho se degrada fortemente.

Finalmente, na Figura 10, exibe-se o desempenho obtido para a modulação incoerente usando C=8 com constelação determinada através do método da Seção 2.2, bem como para o demodulador coerente e o STBC (coerente) usando os parâmetros exatos e

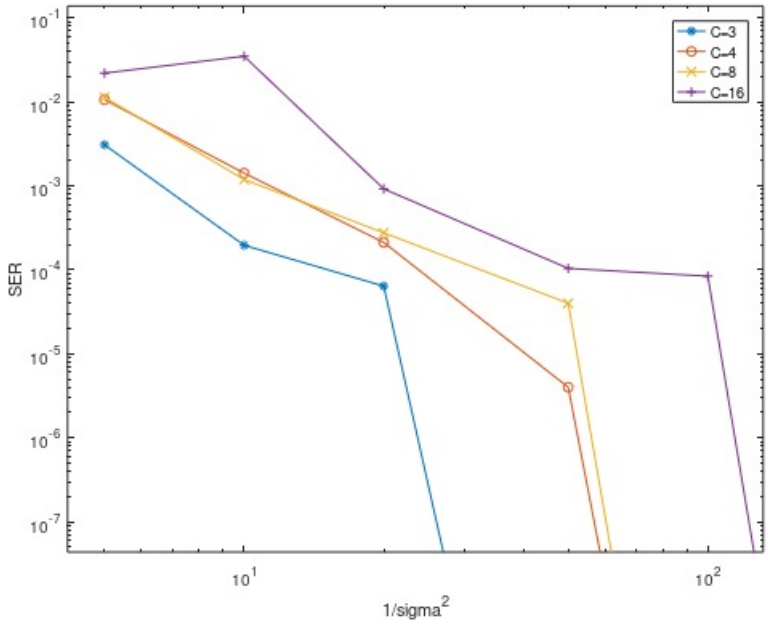

Figura 6 – Desempenho de um sistema de comunicação MIMO coerente em função de σ^2 (variância do ruído) para constelações de diferentes ordens C determinadas através do método descrito na Seção 2.1.

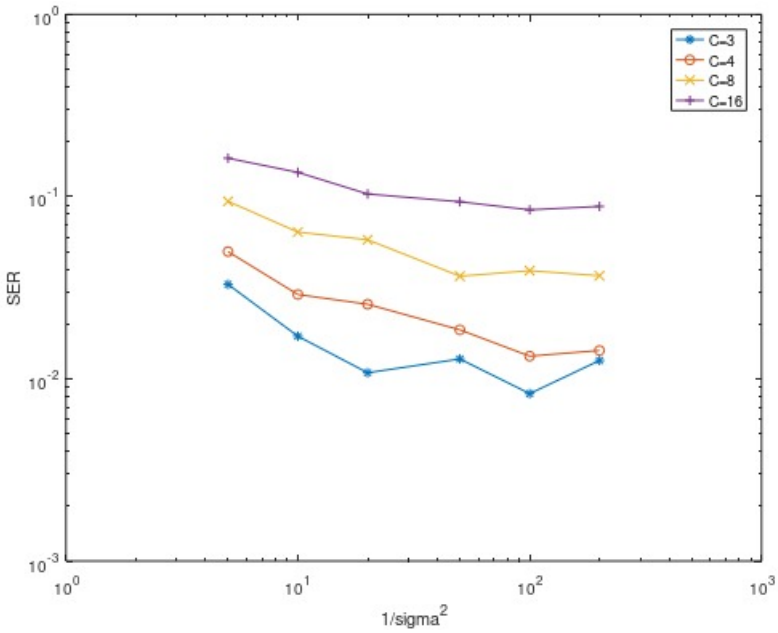

Figura 7 – Desempenho de um sistema de comunicação MIMO coerente utilizando CSI perturbada em função de σ^2 (variância do ruído) para constelações de diferentes ordens C determinadas através do método descrito na Seção 2.1.

estimativas perturbadas do canal. Como se pode observar, o desempenho da demodulação incoerente é vantajoso no último caso.

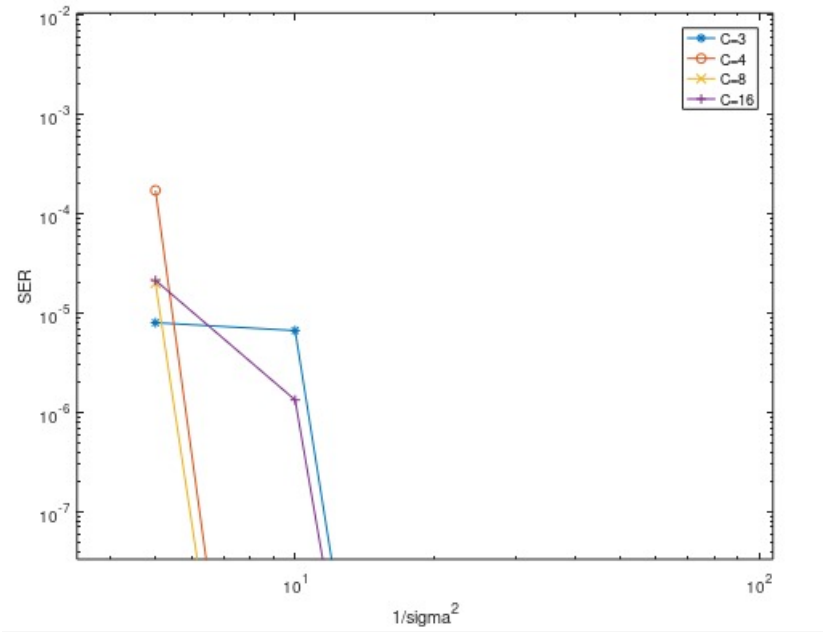

Figura 8 – Desempenho de um sistema de comunicação STBC MIMO em função de σ^2 (variância do ruído) para constelações de diferentes ordens C determinadas através do método descrito na Seção 2.1.

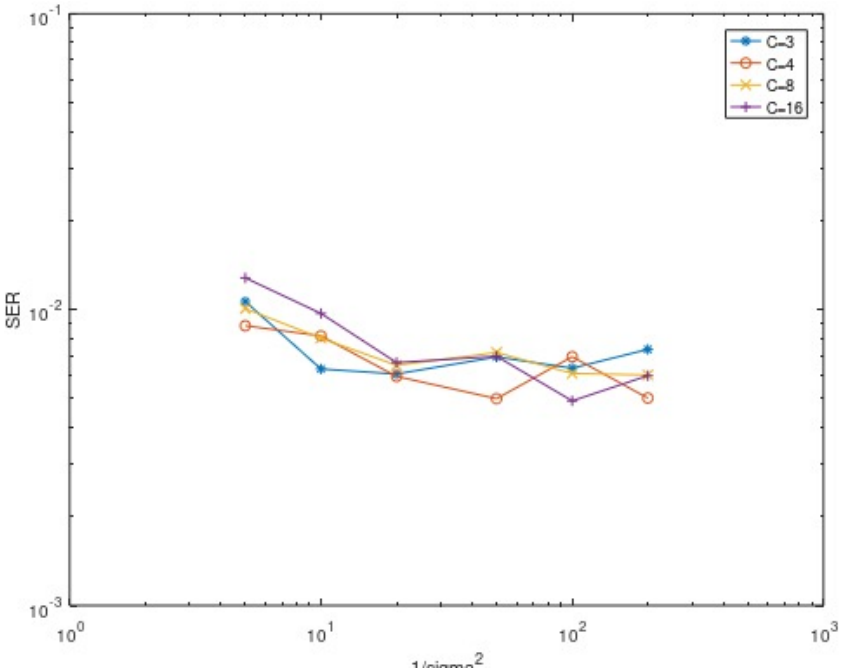

Figura 9 – Desempenho de um sistema de comunicação STBC MIMO utilizando CSI perturbada em função de σ^2 (variância do ruído) para constelações de diferentes ordens C determinadas através do método descrito na Seção 2.1.

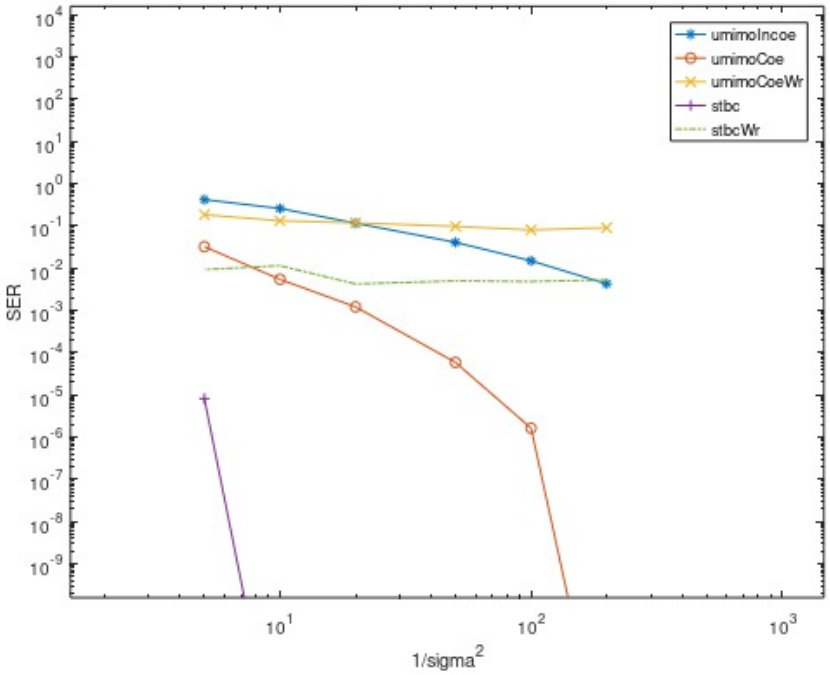

Figura 10 – Desempenho de todos os sistema de comunicação analisados em função de σ^2 (variância do ruído), para constelações com C fixado em 8 determinadas através do método descrito na Seção 2.2. No gráfico, as legendas "umimoInco", "umimoCoe", "umimoCoeWr", "stbc" e "stbcWr" correspondem ao sistema incoerente, coerente, coerente com erro na estimação do canal, stbc, e stbc com erro na estimação do canal, respectivamente.

4 Conclusão

Nesta monografia, analisou-se o desempenho de sistemas de comunicação MIMO incoerentes, utilizando constelações determinadas através dos algoritmos *greedy* e de *alternating projections*. Verificou-se, através de simulações numéricas, que o desempenho desses sistemas é comparável ao de sistemas coerentes ao se utilizarem estimativas perturbadas da CSI no receptor, ao que corresponde à situação prática.

Propõe-se como continuação para este estudo simular constelações com tamanhos distintos dos considerados e, ainda, implementar outros algoritmos para a determinação das constelações.

Referências

DHILLON, I. S. et al. Constructing packings in grassmannian manifolds via alternating projection. *Experimental mathematics*, Taylor & Francis, v. 17, n. 1, p. 9–35, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 6.

FANJUL, J. et al. Experimental evaluation of non-coherent mimo grassmannian signaling schemes. In: SPRINGER. *International Conference on Ad-Hoc Networks and Wireless*. [S.l.], 2017. p. 221–230. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 3.

GOHARY, R. H.; DAVIDSON, T. N. Noncoherent mimo communication: Grassmannian constellations and efficient detection. *IEEE Transactions on Information Theory*, IEEE, v. 55, n. 3, p. 1176–1205, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 1, 2, 3, 4 e 7.

HOCHWALD, B. M. et al. Systematic design of unitary space-time constellations. *IEEE transactions on Information Theory*, IEEE, v. 46, n. 6, p. 1962–1973, 2000. Citado na página 5.

TAROKH, V.; JAFARKHANI, H.; CALDERBANK, A. R. Space-time block codes from orthogonal designs. *IEEE Transactions on Information theory*, IEEE, v. 45, n. 5, p. 1456–1467, 1999. Citado na página 9.

WANG, D.; EVANS, B. L. Codebook design for noncoherent mimo communications via reflection matrices. *Training*, Citeseer, v. 1, n. 2, p. 4–8, 2006. Citado na página 1.

WARRIER, D.; MADHOW, U. Spectrally efficient noncoherent communication. *IEEE Transactions on Information Theory*, IEEE, v. 48, n. 3, p. 651–668, 2002. Citado na página 1.

ZHENG, L.; TSE, D. N. C. Communication on the grassmann manifold: A geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel. *IEEE transactions on Information Theory*, IEEE, v. 48, n. 2, p. 359–383, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 1, 3 e 6.

APÊNDICE A – Código-fonte das simulações

Nas páginas a seguir está listado o código-fonte dos programas utilizados para a geração dos resultados relatados neste trabalho. O código é compatível com o GNU Octave 6.4.0.

```
%
% GREEDY.M
%
% CONSTROI UMA CONSTELAÇÃO USANDO GREEDY OPTIMIZATION
%
%
clear all
close all

T=4;
M=3;%(T>M);
C=3; % testar com 3,4,8,16;
REALIZ=1e6;%1e5,1e6;

%Ponto inicial
Q=zeros(T,M,M);
[u,s,v]=svd(randn(T,M));
Q(:,:,1)=u*eye(T,M)*v';


for m=2:C
  err=inf;
  for realiz=1:REALIZ
    % grassmanniano candidato
    [u,s,v]=svd(randn(T,M));
    Qnew=u*eye(T,M)*v';

    err_new=zeros(m-1,1);
    for mm=1:m-1
      err_new(mm)=sum(svd(Qnew'*Q(:,:,mm)));
    end
    max_err=max(err_new);
    if(max_err<err)
      Q(:,:,m)=Qnew;
      err=max_err;
    end
  end
end

save new_alphabet Q T M
```

```
%
% ALTERNATING_PROJECTIONS.M
%
clear all
close all
% CONSTRUCTING PACKINGS IN GRASSMANNIAN MANIFOLDS VIA ALTERNATING PROJECTION
% I. S. DHILLON, R. W. HEATH JR., T. STROHMER, AND J. A. TROPP
% http://arxiv.org/abs/0709.0535v1

K=3;% Stiefel matrices K x d (M)
d=4;%(T)
N=8;%Number of points (C), valor anterior é 8.
tau=2.5;%Upper bound to similarity

%Initial Configuration (p.9)
X=zeros(d,K,N);

[Q,R]=qr(randn(d,K));
X(:,:,1)=Q(:,1:K);
for n=2:N
  realiz=0;
  while(1)
    realiz=realiz+1;
    [Q,R]=qr(randn(d,K));
    Xcand=Q(:,1:K);

    naux=zeros(n-1,1);
    for m=1:n-1
      naux(m)=norm(X(:,:,m)'*Xcand,'fro')^2;
    end
    if(max(naux)<tau)
      X(:,:,n)=Xcand;
      realiz
      break
    end
  end
end

for k=1:N, for j=1:N, lix(k,j)=norm(X(:,:,k)'*X(:,:,j),'fro').^2; end, end, lix;

XX=[]; for k=1:N, XX=[XX X(:,:,k)]; end; G=XX'*XX;

%Algorithm 1 (p.7)
for k=1:10000

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Find H
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% determine mu
norm_Gmn=zeros(N);
for m=1:N
  for n=m+1:N
      Gmn=G((m-1)*K+1:m*K,(n-1)*K+1:n*K);%Gmn
      norm_Gmn(m,n)=norm(Gmn,'fro');
  end
end
aux=sort(norm_Gmn(:));
mu=mean(aux(end-N*(N-1)/2+1:end));

H=zeros(N*K);
for m=1:N
  for n=1:N
    if(m~=n)
      if((norm_Gmn(m,n)+norm_Gmn(n,m))>mu)
        H((m-1)*K+1:m*K,(n-1)*K+1:n*K)=mu*G((m-1)*K+1:m*K,(n-1)*K+1:n*K)/(norm_Gmn(m,n)+norm_Gmn(n,m));
      else
        H((m-1)*K+1:m*K,(n-1)*K+1:n*K)=G((m-1)*K+1:m*K,(n-1)*K+1:n*K);
      end
    else
      H((m-1)*K+1:m*K,(n-1)*K+1:n*K)=eye(K);
    end
```

```
  end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Find G
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[U,L]=eig(H);
L=diag(L);
L=L(end:-1:end-d+1);% d highest eigenvalues

%determines gamma
gamma=(sum(L)-K*N)/d;
if( abs ( sum(max(L-gamma,0)) - K*N ) > 1e-12)
  disp('Error')
  pause
end

G=zeros(K*N);
for k=1:d
  indx=K*N+1-k;
  G=G+U(:,indx)*U(:,indx)'*(L(k)-gamma);
end
end

sqrtinvD=diag(1./sqrt(diag(G)));
Gout=sqrtinvD*G*sqrtinvD;

Gout=(Gout+Gout')/2;
[UU,LL]=eig(Gout);

LL=diag(LL);
XXX=(UU(:,end-d+1:end)*diag(sqrt(LL(end-d+1:end)))).';

Xout=zeros(d,K,N);% Nova constelação otimizada
for n=1:N
  Xout(:,:,n)=XXX(:,(n-1)*K+1:n*K);
end

for k=1:N, for j=1:N, lix2(k,j)=norm(Xout(:,:,k)'*Xout(:,:,j),'fro').^2; end, end, lix2;

Q = Xout;
T =  d;
M = K;


save new_alphabet2 Q T M
```

```
% UMIMO.M
%
% Implementa um sistema de comunicação
% MIMO incoerente
%
%
clear all
close all

pkg load communications

%load new_alphabet
load new_alphabet2

i=0;
sermed = zeros(1,250);
servar = zeros(1,250);
y = zeros(1,250);
t = 1:1:250;

while i < 250,
  i=i+1;
  nsym=10000;%numero de simbolos transmitidos
  N=M;
  sigma2=.2; % .005,.01,.02,.05,.1,.2;
  C = 8; % testar com 3,4,8,16;
  %H tem dimensao NxM; Y = H Q^T + V tem dimensao (NxM)(MxT)=NxT
  %O número de símbolos distintos é C

  H=randn(N,M); %H é o canal

  symbols=randint(nsym,1,C)+1;
  rec_symbols=zeros(nsym,1);

  for n=1:nsym

    Y=H*Q(:,:,symbols(n)).'+sqrt(sigma2)*randn(N,T);

    err=zeros(C,1);
    for c=1:C
      aux=Y*Q(:,:,c);
      err(c)=norm(aux,'fro')^2;
    end
    [lixo,ind]=max(err);
    rec_symbols(n)=ind;

  end

  %Simbol error rate
  ser=sum(symbols~=rec_symbols)/nsym;
  sermed(i) = ser;
  servar(i) = ser*ser;
endwhile

med = sum(sermed)/250
var = sum(servar)/250
dp = sqrt(var - med**2)

%figure(1)
%plot(t,sermed, 'o')
```

```
% UMIMO_COHERENT.M
%
% Implementa um sistema de comunicação
% MIMO com demodulação coerente
%
%
clear all
close all

pkg load communications

%load new_alphabet
load new_alphabet2

i=0;
sermed = zeros(1,250);
servar = zeros(1,250);
y = zeros(1,250);
t = 1:1:250;

while i < 250,
  i=i+1;
  nsym=10000;%numero de simbolos transmitidos 1000,10000
  N=M;
  sigma2=.2;%0.005; .01; .02; .05; .1; .2;
  C = 8;%3,4,8,16;

  %H tem dimensao NxM; Y = H Q^T + V tem dimensao (NxM)(MxT)=NxT
  %O número de símbolos distintos é C

  H=randn(N,M);% H é o canal

  %vetor nsymX1 de entradas aleatórias entre 1 e C
  %com o índice dos símbolos transmitidos
  symbols=randint(nsym,1,C)+1;

  rec_symbols=zeros(nsym,1);%armazena os símbolos decodificados

  for n=1:nsym

    Y=H*Q(:,:,symbols(n)).'+sqrt(sigma2)*randn(N,T);

    err=zeros(C,1);%Mede a semelhança do recebido com cada símbolo
    for c=1:C
      aux=Y-H*Q(:,:,c).';
      err(c)=norm(aux,'fro')^2;%Norma de Frobenius
    end
    [lixo,ind]=min(err);%Decisão pelo critério de máxima versossimilhança
    rec_symbols(n)=ind;

  end

  %Symbol error rate
  %Simbol error rate
  ser=sum(symbols~=rec_symbols)/nsym;
  sermed(i) = ser;
  servar(i) = ser*ser;
endwhile

med = sum(sermed)/250
var = sum(servar)/250;
dp = sqrt(var - med**2);
```

```
% UMIMO_COHERENT_WRONGCHAN.M
%
% Implementa um sistema de comunicação
% MIMO com demodulação coerente
% utilizando CSI perturbada no receptor
%
clear all
close all

pkg load communications

%load new_alphabet
load new_alphabet2

i=0;
sermed = zeros(1,250);
servar = zeros(1,250);
y = zeros(1,250);
t = 1:1:250;

while i < 250,
  i=i+1;

  nsym=1000;%numero de simbolos transmitidos 1000,10000,1e5
  N=M;
  sigma2=.2;%0.005; .01; .02; .05; .1; .2;
  epsilon2=.0625;%Variância do erro da estimação do canal
  C = 8;%3,4,8,16;

  %H tem dimensao NxM; Y = H Q^T + V tem dimensao (NxM)(MxT)=NxT
  %O número de símbolos distintos é C

  H=randn(N,M);% H é o canal


  %vetor nsymX1 de entradas aleatórias entre 1 e C
  %com o índice dos símbolos transmitidos
  symbols=randint(nsym,1,C)+1;

  rec_symbols=zeros(nsym,1);%armazena os símbolos decodificados

  for n=1:nsym

    Y=H*Q(:,:,symbols(n)).'+sqrt(sigma2)*randn(N,T);

    err=zeros(C,1);%Mede a semelhança do recebido com cada símbolo
    for c=1:C
      Herr=sqrt(1-epsilon2)*H+sqrt(epsilon2)*randn(N,M);
      aux=Y-Herr*Q(:,:,c).';
      err(c)=norm(aux,'fro')^2;%Norma de Frobenius
    end
    [lixo,ind]=min(err);%Decisão pelo critério de máxima versossimilhança
    rec_symbols(n)=ind;

  end

  %Symbol error rate
  ser=sum(symbols~=rec_symbols)/nsym;
  sermed(i) = ser;
  servar(i) = ser*ser;
endwhile

med = sum(sermed)/250
var = sum(servar)/250;
dp = sqrt(var - med**2);
```

```
% STBC_MIMO.M
%
% Implementa um sistema de comunicação
% MIMO usando o Código STBC de Taroukh et al. taxa 3/4
%
%
clear all
close all

pkg load communications

i=0;
sermed = zeros(1,250);
servar = zeros(1,250);
y = zeros(1,250);
t = 1:1:250;

while i < 250,
  i=i+1;

  T=4;
  M=3;%o STBC abaixo só funciona para M=3

  nsym=1000;%numero de simbolos transmitidos
  N=M;
  sigma2=.1;%0.005; .01; .02; .05; .1; .2;

  %H tem dimensao NxM; Y = H Q^T + V tem dimensao (NxM)(MxT)=NxT
  %O número de símbolos distintos é C

  H=randn(N,M);% H é o canal

  %vetor nsymX1 de entradas aleatórias binárias
  %com o índice dos símbolos transmitidos
  symbols=2*randint(nsym,3,2)-1;

  rec_symbols=zeros(nsym,3);%armazena os símbolos decodificados

  for n=1:nsym

    sqm=sqrt(.5);

    c1=symbols(n,1);
    c2=symbols(n,2);
    c3=symbols(n,3);

    % Código Taroukh et al. taxa 3/4
    CS=[c1 c2 c3*sqm;-c2' c1' c3*sqm;c3'*sqm c3'*sqm (-c1-c1'+c2-c2')/2;c3'*sqm -c3'*sqm (c2+c2'+c1-c1')/2].';
    Y=H*CS+sqrt(sigma2)*randn(N,T);

    err=zeros(8,1);%Mede a semelhança do recebido com cada símbolo
    for c=1:8
      aux=2*de2bi(c-1,3)-1;
      d1=aux(1);
      d2=aux(2);
      d3=aux(3);
      DS=[d1 d2 d3*sqm;-d2' d1' d3*sqm;d3'*sqm d3'*sqm (-d1-d1'+d2-d2')/2;d3'*sqm -d3'*sqm (d2+d2'+d1-d1')/2].';
      aux=Y-H*DS;
      err(c)=norm(aux,'fro')^2;%Norma de Frobenius
    end
    [lixo,ind]=min(err);%Decisão pelo critério de máxima versossimilhança
    rec_symbols(n,:)=2*de2bi(ind-1,3)-1;

  end

  %Symbol error rate
  ser=sum(symbols(:)~=rec_symbols(:))/length(symbols(:));
  sermed(i) = ser;
  servar(i) = ser*ser;
endwhile
```

```
med = sum(sermed)/250
var = sum(servar)/250;
dp = sqrt(var - med**2);

```

```
% STBC_MIMO_WRONGCHAN.M
%
% Implementa um sistema de comunicação
% MIMO usando o Código STBC de Taroukh et al. taxa 3/4
% utilizando CSI perturbada no receptor
%
clear all
close all

pkg load communications

load new_alphabet
%load new_alphabet2

i=0;
sermed = zeros(1,250);
servar = zeros(1,250);
y = zeros(1,250);
t = 1:1:250;

while i < 250,
  i=i+1;

  T=4;
  M=3;%o STBC abaixo só funciona para M=3

  nsym=1000;%numero de simbolos transmitidos
  N=M;
  sigma2=.2;%.005; .01; .02; .05; .1; .2;
  epsilon2=.0625;

  %H tem dimensao NxM; Y = H Q^T + V tem dimensao (NxM)(MxT)=NxT
  %O número de símbolos distintos é C

  H=randn(N,M);% H é o canal

  %vetor nsymX1 de entradas aleatórias binárias
  %com o índice dos símbolos transmitidos
  symbols=2*randint(nsym,3,2)-1;

  rec_symbols=zeros(nsym,3);%armazena os símbolos decodificados

  for n=1:nsym

    sqm=sqrt(.5);

    c1=symbols(n,1);
    c2=symbols(n,2);
    c3=symbols(n,3);

    % Código taxa 3/4
    % Vahid Tarokh; Hamid Jafarkhani & A. R. Calderbank (July 1999). "Space-time block codes from orthogonal designs". IEEE Transactions on Information Theory. 45 (5): 744-765.
    CS=[c1 c2 c3*sqm;-c2' c1' c3*sqm;c3'*sqm c3'*sqm (-c1-c1'+c2-c2')/2;c3'*sqm -c3'*sqm (c2+c2'+c1-c1')/2].';
    Y=H*CS+sqrt(sigma2)*randn(N,T);

    err=zeros(8,1);%Mede a semelhança do recebido com cada símbolo
    for c=1:8
      aux=2*de2bi(c-1,3)-1;
      d1=aux(1);
      d2=aux(2);
      d3=aux(3);
      DS=[d1 d2 d3*sqm;-d2' d1' d3*sqm;d3'*sqm d3'*sqm (-d1-d1'+d2-d2')/2;d3'*sqm -d3'*sqm (d2+d2'+d1-d1')/2].';
      Herr=sqrt(1-epsilon2)*H+sqrt(epsilon2)*randn(N,M);
      aux=Y-Herr*DS;
      err(c)=norm(aux,'fro')^2;%Norma de Frobenius
    end
    [lixo,ind]=min(err);%Decisão pelo critério de máxima versossimilhança
    rec_symbols(n,:)=2*de2bi(ind-1,3)-1;

```

```
    end

    %Symbol error rate
    ser=sum(symbols(:)~=rec_symbols(:))/length(symbols(:));
    sermed(i) = ser;
    servar(i) = ser*ser;
  endwhile

  med = sum(sermed)/250
  var = sum(servar)/250;
  dp = sqrt(var - med**2);

```