

Alexandre Miccheleti Lucena

**Estudo sobre separação cega de fontes em  
misturas não lineares.**

Santo André, SP, Brasil

2018

Alexandre Miccheleti Lucena

**Estudo sobre separação cega de fontes em misturas não lineares.**

Monografia apresentada ao curso de Engenharia de Informação da Universidade Federal do ABC como parte dos requisitos para obtenção do grau de Engenheiro em Eletrônica.

Universidade Federal do ABC – UFABC

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas — CECS

Graduação em Engenharia de Informação

Orientador: Ricardo Suyama

Santo André, SP, Brasil

2018

# Resumo

Em processamento de sinais, a separação cega de fontes é um tema consolidado e que avança continuamente. Este trabalho trás um estudo dos mais importantes tópicos associados a este tema, iniciando pela abordagem com misturas lineares, que deram origem à esta área, até abordagens recentes associadas à misturas não lineares. Para os modelos estudados, são mencionadas as principais ferramentas, sendo uma delas a Análise de Componentes Independentes. Esta é uma ferramenta importante, tanto na abordagem de misturas lineares quanto não lineares, onde há casos de misturas em que esta ferramenta pode ser utilizada, Uma nova abordagem proposta por (EHSANDOUST *et al.*, 2017) para solução do problema de separação com misturas não lineares também é explorada. A partir de suposições sobre o modelo de mistura, foram criados algoritmos capazes de realizar a separação com resultados promissores. Estes conceitos mencionados são verificados através de simulações, que permitem implementar computacionalmente os algoritmos que resolvem os problemas de separação.

**Palavras-chave:** separação cega de fontes, misturas não lineares, processamento de sinais, análise de componentes independentes.

# Abstract

In signal processing, blind source separation is a consolidated topic that is in constant development. This work is a study of the most important topics related to this topic, beginning from the approach over linear mixtures, that originated this field, until more recent approaches related to nonlinear mixtures. For the studied models, the main tools are mentioned, where Independent Component Analysis is one of them. This is an important tool for linear mixtures as well as nonlinear ones, where are cases that this tool can be used for separation. A new approach proposed in (EHSANDOUST et al., 2017) for the solution of the separation for non linear mixtures is also explored. From assumptions over the mixture model, promising algorithms capable of obtaining separation were created. The mentioned concepts are verified through simulations, computationally implementing the algorithms that resolves the separation problems.

**Key-words:**blind source separation, nonlinear mixtures, signal processing, independent component analysis.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
1.1	Separação Cega de Fontes	6
1.2	Análise de Componentes Independentes	6
1.3	Misturas não-lineares	7
1.4	Objetivo	8
<b>2</b>	<b>Revisão</b>	<b>9</b>
2.1	BSS para misturas lineares	9
2.1.1	Definição Matemática do problema	9
2.1.2	Análise de Componentes Independentes	9
2.1.3	Branqueamento dos Dados	10
2.1.4	ICA pela maximização da Não Gaussianidade	10
2.1.4.1	Medida de não gaussianidade pela Curtose	11
2.1.4.2	Medida de não gaussianidade pela Negentropia	11
2.1.5	Algoritmos	12
2.1.5.1	FastICA	12
2.1.5.2	<i>Equivariant Adaptive Separation via Independence (EASI)</i>	13
2.2	BSS para misturas não lineares	13
2.2.1	<i>Post Nonlinear (PNL)</i>	13
2.2.2	Linear Quadrática	14
2.2.3	Mistura não linear	15
<b>3</b>	<b>Solução para o caso não-linear</b>	<b>17</b>
3.1	Proposta de EHSANDOUST et al.	17
3.2	Definição e Separabilidade	18
3.3	Algoritmos	19
3.3.1	<i>Adaptive Algorithm for Time-Variant Linear mixtures (AATVL)</i>	19
3.3.2	<i>Batch Algorithm for Time-Invariant Nonlinear mixtures (BATIN)</i>	20
<b>4</b>	<b>Simulação e Resultados</b>	<b>22</b>
4.1	Misturas Lineares	22
4.1.1	FastICA	22
4.2	Misturas Não Lineares	24
4.2.1	N-EASI	26
4.2.2	AATVL	27
4.2.3	BATIN	28

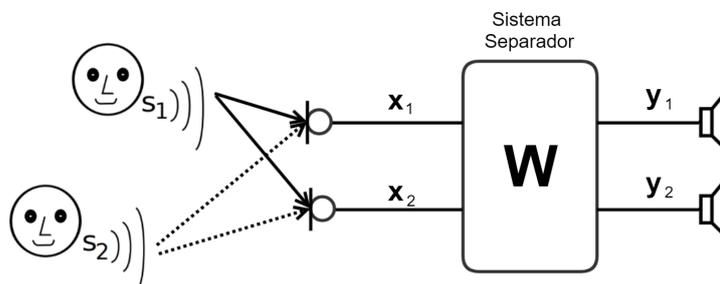
4.2.4	Comparação dos resultados	29
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>31</b>
	<b>Referências</b>	<b>32</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Separação Cega de Fontes

O problema da separação cega de fontes (do inglês BSS- *Blind Source Separation*), formalmente definido no início dos anos 80 (ANS; HERAULT; JUTTEN, 1985), tem recebido grande atenção dos pesquisadores devido à sua formulação abrangente. Este problema consiste na separação de sinais misturados, onde existe nenhuma (ou muito pouca) informação sobre o processo de mistura ou dos sinais originais. Um exemplo comumente utilizado para descrever este problema é o chamado problema do coquetel (*Cocktail-party problem*): numa festa, apesar de muitas pessoas falarem simultaneamente, é possível entender seu interlocutor durante uma conversa, mesmo que existam outras fontes sonoras no local. Note que o mesmo problema ocorre em diferentes aplicações práticas, como em uma sessão de gravação de áudio, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Ilustração do problema do coquetel. Adaptada de (CONDURACHE, 2015)



## 1.2 Análise de Componentes Independentes

O método usual para se resolver o problema assume que as fontes são sinais estatisticamente independentes entre si, o que levou ao desenvolvimento da ferramenta hoje conhecida como Análise de Componentes Independentes (do inglês, ICA – Independent Component Analysis) (HYVÄRINEN; KARHUNEN; OJA, 2001). Uma vez que os sinais das fontes são independentes entre si, o método baseado em ICA propõe que os sinais das fontes sejam estimados por meio de uma combinação linear dos sinais observados, i.e.

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a matriz de separação dos sinais, que deve ser ajustada para que o vetor de sinais estimados,  $\mathbf{y}$ , contenha sinais também mutuamente independentes.

Para encontrar a matriz de separação  $\mathbf{W}$ , foram desenvolvidos algoritmos capazes de explorar as características estatísticas do sinal, na hipótese de que as fontes são processos aleatórios independentes entre si. Nesse sentido alguns algoritmos implementam a maximização da não-gaussianidade através de métodos de gradientes e minimização da informação mútua, para obter a matriz  $\mathbf{W}$  (HYVÄRINEN; KARHUNEN; OJA, 2001).

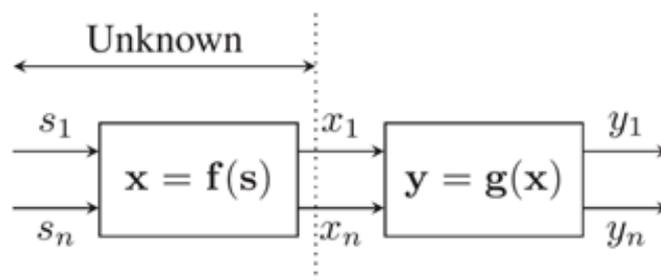
Há ainda métodos alternativos propostos, com uma proposta diferente do ICA, para os casos em que as hipóteses descritas não são atendidas. Por exemplo, se as fontes possuem correlação temporal, existem algoritmos como AMUSE, SOBI e TDSEP, onde é considerado que as fontes possuem espectros de potência distintos, e utilizando estatísticas de segunda ordem dos sinais, torna-se possível determinar um sistema separador (AI et al., 2008). Outra característica é que não há impedimentos para sinais gaussianos como ocorre na ICA.

### 1.3 Misturas não-lineares

É interessante notar que a mesma abordagem de separação baseada em ICA também é aplicável para uma classe particular de misturas não-lineares, denominada de mistura com não-linearidade posterior (do inglês, PNL – *Post-Nonlinear*) (TALEB; JUTTEN, 1999). Embora se trate de um caso particular, o modelo de mistura PNL conta com aplicações práticas interessantes, como no processo de modelagem de não-linearidades existentes nos sensores – por exemplo, pré-amplificadores dos microfones de uma gravação apresentam distorção não-linear (DUARTE et al., 2012).

Entretanto, de uma maneira geral, o ICA não é aplicável para misturas não-lineares já que a independência das fontes não é critério suficiente para a separação (BABAIE-ZADEH, 2002). A Figura 2 exemplifica o modelo básico de mistura não linear.

Figura 2 – Modelo básico de BSS não-linear. (EHSANDOUST et al., 2017)



Neste sentido, trabalhos recentes tem sido apresentados (EHSANDOUST et al., 2017) na tentativa de explorar novas abordagens para este tipo de mistura, de maneira mais abrangente e explorando novos algoritmos na solução deste problema.

## 1.4 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo promover e discutir conceitos relacionados à separação cega de fontes com destaque para o caso onde ocorrem misturas não lineares, através de uma revisão do problema e introdução dos principais métodos de solução conhecidos para casos lineares e não lineares.

## 2 Revisão

### 2.1 BSS para misturas lineares

#### 2.1.1 Definição Matemática do problema

Matematicamente, considerando apenas a presença de dois sinais de interesse (as fontes) sendo captados por dois sensores (as observações), conforme indicado na Figura 1, pode-se modelar os sinais observados como sendo:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t) \\x_2(t) &= a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  denotam os sinais observados,  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  denotam os sinais das fontes, e  $a_{ij}$  denotam os coeficientes de mistura, que são a princípio desconhecidos. Nesse caso particular, considera-se que o processo de mistura é bem modelado por meio de um processo linear, que pode ser descrito em notação matricial como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}\tag{2.2}$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz de mistura, que contém os coeficientes  $a_{ij}$ . No problema de BSS, o desafio é obter estimativas para os sinais das fontes a partir de  $x(t)$  sem o conhecimento prévio da matriz  $\mathbf{A}$ .

Esta é a representação descrita para o caso onde ocorre uma mistura linear, sem influência de ruído ou atrasos, simplificando o modelo. Entretanto existem outros tipos de misturas onde este modelo pode sofrer alterações, como por exemplo para misturas não-lineares, convolutivas, e com memória.

#### 2.1.2 Análise de Componentes Independentes

A principal abordagem portanto, para a solução do BSS é encontrar uma representação linear onde as componentes sejam estatisticamente independentes.

A Análise de Componentes Independentes (do inglês, ICA – *Independent Component Analysis*) está diretamente ligada ao problema de BSS, já que seu objetivo, como o nome sugere, visa estimar componentes independentes a partir da maximização, por exemplo, da não gaussianidade dos sinais.

Dado um conjunto de observações de sinais gerados por variáveis aleatórias (análogo ao obtido em (2.1))  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  onde  $t$  é o tempo ou índice da amostra, assumindo

que foram geradas pela mistura de componentes independentes:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= w_{11}x_1(t) + w_{12}x_2(t) \\y_2(t) &= w_{21}x_1(t) + w_{22}x_2(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Os sinais  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são os sinais das fontes estimados, onde  $w_{ij}$  denotam os coeficientes da matriz  $\mathbf{W}$  que promovem a transformação linear que realiza a separação, estimando as componentes independentes.

As condições que garantem que tal critério leve, de fato, à recuperação das fontes, foram estabelecidas em (COMON, 1994), e consistem em: 1) há mais observações do que fontes; 2) as fontes são estatisticamente independentes; 3) os sinais são estacionários; 4) há no máximo uma fonte com distribuição gaussiana.

Na prática, não é possível encontrar as componentes de maneira em que sejam completamente independentes, entretanto é possível maximizar esta condição.

### 2.1.3 Branqueamento dos Dados

O branqueamento de um conjunto de dados é um pré processamento importante para a realização do ICA. Para um vetor aleatório de média zero, seu branqueamento implica que seus componentes são não correlacionados e sua variância é igual a 1. Portanto, sua matriz de covariância (correlação) será equivalente à matriz identidade.

Para um vetor de dados observados  $\mathbf{x}$ , o branqueamento pode ser representado por uma transformação linear dada pela multiplicação do vetor  $\mathbf{x}$  por uma matriz  $\mathbf{V}$ .

$$\mathbf{z} = \mathbf{V}\mathbf{x}\tag{2.4}$$

Um método popular para obtenção da matriz de branqueamento, é a decomposição em autovalores da matriz de covariância  $\mathbf{R}$ :

$$E\{\mathbf{xx}^T\} = \mathbf{R}\tag{2.5}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T\tag{2.6}$$

sendo  $\mathbf{E}$  a matriz ortogonal de autovetores de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{D}$  a matriz diagonal de seus autovalores. Assim, a matriz  $\mathbf{V}$  de branqueamento é dada por.

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{E}^T\tag{2.7}$$

### 2.1.4 ICA pela maximização da Não Gaussianidade

Com base no teorema central do limite, é sabido que a partir de misturas entre variáveis aleatórias (V.A.) independentes, a distribuição da mistura passa a se tornar próxima de uma distribuição gaussiana.

Duas grandezas que podem medir de maneira quantitativa o quanto uma distribuição se aproxima de uma gaussiana são a curtose e a Negentropia. Através de algoritmos, por exemplo do gradiente ou baseados em ponto-fixo, é possível buscar no conjunto de dados as “direções” (componentes) que maximizam a não gaussianidade do conjunto.

#### 2.1.4.1 Medida de não gaussianidade pela Curtose

A curtose pode ser usada como uma medida quantitativa de não gaussianidade de uma V.A.. É o nome dado à cumulante de quarta ordem de uma V.A., e definido como:

$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2 \quad (2.8)$$

A curtose é comumente usada na medida de não gaussianidade em áreas relacionadas a ICA, devido a sua simplicidade teórica e computacional. Para uma V.A. gaussiana normalizada ( $E\{y^2\} = 1$ ) o momento de quarta ordem é igual à  $3(E\{y^2\})^2$ . Sendo assim (salvo raras exceções) se uma V.A. possui um valor de curtose igual a 0, esta possui uma distribuição gaussiana. Uma V.A. não-gaussiana portanto pode assumir valores positivos (super gaussiana) ou negativos (sub gaussiana) para a curtose, sendo sua magnitude associada ao quanto esta V.A difere de uma variável com distribuição gaussiana.

#### 2.1.4.2 Medida de não gaussianidade pela Negentropia

A Negentropia é baseada na grandeza da teoria da informação chamada entropia diferencial, que pode ser associada ao quanto a entropia de uma V.A. qualquer difere da entropia de uma V.A. gaussiana. Devido a característica de máxima entropia de uma V.A. gaussiana, esta grandeza se torna uma boa estimativa para a não gaussianidade.

Em algumas situações a medida da negentropia pode ser mais vantajosa que a curtose. Suas propriedades se opõem de certa forma à curtose, ou seja é computacionalmente mais custosa.

É possível simplificar a negentropia em uma expansão de termos dos momentos associados à V.A.. Utilizando apenas os momentos de terceira e quarta ordem é possível obter uma medida simplificada da negentropia de uma V.A. normalizada. Esta aproximação é dada por:

$$J(y) \approx \frac{1}{12}E\{y^3\} + \frac{1}{48}kurt(y)^2 \quad (2.9)$$

Na prática, para um ganho na eficiência computacional é possível aproximar a negentropia por funções não polinomiais.

## 2.1.5 Algoritmos

### 2.1.5.1 FastICA

Tendo em vista a tentativa de maximizar a não gaussianidade como critério de obtenção da independência entre os sinais, a implementação do ICA é dada através da combinação de métodos de ponto-fixo, que buscam otimizar a não gaussianidade em relação a uma função custo, podendo ser utilizada tanto a medida de Curtose quanto de Negentropia no desenvolvimento de algoritmos que estimam as componentes. Este tipo de algoritmo é chamado de FastICA e implementa de maneira eficiente a busca de uma rotação ortogonal sobre os dados, a fim de maximizar a não gaussianidade, podendo ser obtido a partir de simplificações do método de gradiente associado às métricas de não gaussianidade.

Como pré processamento dos dados é necessário realizar uma etapa de branqueamento (2.1.3) antes da inicialização do algoritmo. Assim, o Algoritmo 1 é a descrição de um pseudo código para a implementação do FastICA, utilizada posteriormente nas etapas de simulação. Este algoritmo é melhor descrito no Capítulo 8 de (HYVÄRINEN; KARHUNEN; OJA, 2001), Tabela 8.4.

---

#### Algoritmo 1 FastICA (HYVÄRINEN; KARHUNEN; OJA, 2001)

---

- 1: Centralizar os dados para que tenham média nula.
- 2: Branqueamento dos dados para obter  $\mathbf{z}$ .
- 3: Escolha  $m$ , o número de componentes a estimar.
- 4: Inicializa  $\mathbf{w}_i, i = 1, \dots, m$ , com norma unitária. Ortogonaliza a matriz  $\mathbf{W}$  como no passo 6.
- 5: Para cada  $i = 1, \dots, m$  :

$$\mathbf{w}_i \leftarrow E\{\mathbf{z}g(\mathbf{w}_i^T\mathbf{z})\mathbf{z}\} - E\{g'(\mathbf{w}_i^T\mathbf{z})\mathbf{z}\}\mathbf{w}_i \quad (2.10)$$

- 6: Faz uma ortogonalização simétrica da matriz  $\mathbf{W} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)^T$  por

$$\mathbf{W} \leftarrow (\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{W}, \quad (2.11)$$

- 7: Se não convergiu, voltar para o passo 5.
- 

Na Equação (2.10) a função  $g$  é implementada como uma aproximação robusta da Negentropia. Alternativamente poderia ser utilizada também uma aproximação da medida de Curtose, dependendo do tipo de distribuição da fonte. Assim pode-se escolher  $g$  entre:

$$g_1(y) = \tanh(a_1 y) \quad (2.12)$$

$$g_2(y) = y \exp(-y^2/2) \quad (2.13)$$

$$g_3(y) = y^3 \quad (2.14)$$

onde  $1 \leq a_1 \leq 2$ , é uma constante geralmente tomada como  $a_1 = 1$ .

### 2.1.5.2 Equivariant Adaptive Separation via Independence (EASI)

Na maior parte das abordagens sugeridas para a solução da ICA, os algoritmos envolvem métodos de gradiente para a busca da independência entre as componentes. Considerando a atualização de uma matriz  $\mathbf{W}$ , que busca separar as componentes, uma forma generalizada para a operação de atualização nos casos onde utiliza-se o método de gradiente é apresentada na forma (SUYAMA et al., 2007):

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \pm \mu \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \Big|_{\mathbf{w}} \quad (2.15)$$

onde  $\mu$  representa o passo de atualização, e  $J$  a função custo a ser otimizada, onde o sinal está associado a necessidade de maximização ou minimização desta função. Neste sentido, uma outra abordagem para a atualização da matriz de separação é o algoritmo *Equivariant Adaptive Separation via Independence* (EASI) (CARDOSO; LAHELD, 1996), onde é introduzido o conceito de *gradiente relativo*. Através da regra de adaptação serial, a matriz de mistura  $\mathbf{W}$  é atualizada de maneira multiplicativa na forma (SUYAMA et al., 2007):

$$\mathbf{W} \leftarrow (\mathbf{I} - \lambda \Psi(\mathbf{y})) \mathbf{W} \quad (2.16)$$

onde  $\Psi(\cdot)$  mapeia um vetor em uma matriz e  $\lambda$  corresponde ao passo de adaptação. Uma vantagem desta abordagem é a possibilidade de evitar a inversão da matriz  $\mathbf{W}$  que é geralmente custosa computacionalmente. A regra definitiva proposta em (CARDOSO; LAHELD, 1996), incluindo a restrição de ortogonalidade é expressa por:

$$\mathbf{W}_{t+1} = \mathbf{W}_t - \lambda_t [\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^T - \mathbf{I} + \mathbf{g}(\mathbf{y}_t) \mathbf{y}_t^T - \mathbf{y}_t \mathbf{g}(\mathbf{y}_t)^T] \mathbf{W}_t \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{g}(\cdot)$  é uma função não linear, e  $\lambda_t$  é uma sequência de escalares positivos. Considerando a forma normalizada (N-EASI) tem-se:

$$\mathbf{W}_{t+1} = \mathbf{W}_t - \lambda_t \left[ \frac{\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^T - \mathbf{I}}{1 + \lambda_t \mathbf{y}_t^T \mathbf{y}_t} + \frac{\mathbf{g}(\mathbf{y}_t) \mathbf{y}_t^T - \mathbf{y}_t \mathbf{g}(\mathbf{y}_t)^T}{1 + \lambda_t |\mathbf{y}_t^T \mathbf{g}(\mathbf{y}_t)|} \right] \mathbf{W}_t \quad (2.18)$$

## 2.2 BSS para misturas não lineares

### 2.2.1 Post Nonlinear (PNL)

Em certas aplicações, como por exemplo sensores (PARASHIV-IONESCU et al., 1998) ou em comunicação (PRAKRIYA; HATZINAKOS, 1995), uma não linearidade pode ser introduzida após o processo de mistura dos sinais por conta de características dos componentes. Este tipo de mistura é chamado de *Post Nonlinear* (PNL), e foi introduzida por Taleb e Jutten (TALEB; JUTTEN, 1997), onde o modelo e separabilidade foram definidas. Este tipo de mistura pode ser expressa matematicamente como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{A}\mathbf{s}) \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{f}(\mathbf{e}) = [f_1(e_1), f_2(e_2), \dots, f_N(e_N)]$ .

O sistema separador atua de forma a reverter os efeitos introduzidos na mistura PNL, ou seja, compensar a não linearidade introduzida e realizar a separação. Isso é modelado pela utilização de não linearidades  $g_i(\cdot)$  e uma matriz de separação  $\mathbf{W}$ , sendo expresso por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{g}(\mathbf{e}) = [g_1(e_1), g_2(e_2), \dots, g_N(e_N)]$ .

As condições de separabilidade definidas em (TALEB; JUTTEN, 1999) são apresentadas em (SUYAMA et al., 2007) da seguinte forma:

- A matriz  $\mathbf{A}$  é inversível e, de fato, mistura as fontes, ou seja, há ao menos dois elementos não-nulos em cada coluna e linha desta matriz;
- As funções  $\mathbf{f}(\cdot)$  e  $\mathbf{g}(\cdot)$  são monotônicas; conseqüentemente, a composição  $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  também será monotônica;
- Há, no máximo, uma fonte gaussiana;
- A função densidade de probabilidade conjunta das fontes é diferenciável e sua derivada é contínua em todo o seu suporte.

Apesar de ser um modelo não linear específico, o PNL pode ser resolvido através da aplicação da ICA para a recuperação das fontes, conforme apresentado em (TALEB; JUTTEN, 1999) e em (ILIN; HONKELA, 2004). Além disso outras abordagens envolvendo por exemplo algoritmos genéticos (ROJAS et al., 2001) e algoritmos imunológicos (SUYAMA et al., 2007) foram desenvolvidas e se mostraram eficientes na solução deste problema.

### 2.2.2 Linear Quadrática

A mistura Linear Quadrática é uma classe específica de misturas não lineares onde também é possível obter a separação através do método de ICA linear. Este modelo tem como aplicação o desenvolvimento de conjuntos de sensores de gás (JIMENEZ, 2006) e também na redução do efeito de *show-through* (MERRIKH-BAYAT; BABAIE-ZADEH; JUTTEN, 2011). Matematicamente, o modelo pode ser expresso por (DUARTE et al., 2010):

$$x_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + a_{i3}s_1s_2, \forall_i \in 1, \dots, n_m \quad (2.21)$$

onde  $a_{ij}$  representa o coeficiente de mistura e  $n_m$  é a quantidade de misturas. Alternativamente, o modelo pode ser descrito com a seguinte notação vetorial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_m 1} & a_{n_m 2} & a_{n_m 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

sendo  $s_1, s_2$  e  $s_3 = s_1 s_2$ . Para o caso por exemplo onde  $n_m = 3$ , a matriz de mistura resultante torna-se quadrada e, portanto pode ser invertida:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$  representam as fontes estimadas. Apesar de neste caso  $s_1, s_2$  e  $s_3 = s_1 s_2$ , e portanto  $s_3$  ser dependente, há uma tentativa de estimar  $s_1$  e  $s_2$  através de uma matriz de separação retangular:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Dessa forma para que a separação seja alcançada, o ICA é estimado pela minimização da informação mútua entre os elementos de  $\mathbf{y}$  (DUARTE et al., 2010).

### 2.2.3 Mistura não linear

Apesar de, para misturas lineares, a ICA garantir a separabilidade, de uma maneira geral, o mesmo não é válido para misturas não lineares. Foi visto nas sessões anteriores que para modelos específicos como PNL e Linear Quadrática, o ICA é capaz de realizar a separação em certas condições, não podendo entretanto ser generalizado para todos os tipos de misturas não lineares. Isso se deve ao fato de que a independência dos sinais não é critério suficiente para obter a separação nestes casos, onde mesmo que ela seja atingida, as fontes não são recuperadas.

Há portanto uma tentativa de encontrar uma melhor abordagem para este caso, que seja mais geral e considere as restrições do modelo na elaboração de algoritmos. O modelo matemático geral para misturas não lineares pode ser expresso como um mapeamento  $\mathbf{F} : \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^M$  tal que:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}(\mathbf{s}(k)) \quad (2.25)$$

É necessário então encontrar um mapeamento não linear que seja capaz de realizar a estimativa das fontes  $\mathbf{y}(k)$ , ou seja:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(k)) \quad (2.26)$$

---

A escolha de  $\mathbf{G}$  capaz de realizar a separação é extremamente complexa, pois é comum a utilização de funções parametrizadas, de maneira que pode não ser possível reverter o mapeamento  $\mathbf{F}(\cdot)$ .

### 3 Solução para o caso não-linear

Novas abordagens para a solução do problema de BSS para casos de misturas não lineares têm sido exploradas. O artigo intitulado “*Blind source separation in nonlinear mixtures: separability and a basic algorithm.*” (EHSANDOUST et al., 2017), propõe uma maneira de realizar a separação para misturas não lineares através do estudo de sua separabilidade e de um algoritmo básico. Os principais conceitos desta abordagem são apresentados a seguir.

#### 3.1 Proposta de EHSANDOUST et al.

O problema modelo, descrito na Figura 2, considera que o número de fontes é igual ao de observações e espera-se que cada um dos elementos de  $y(t) = g(x(t))$  seja função de apenas um dos sinais fonte (e cada sinal fonte apareça em uma única entrada de  $y(t)$ ).

Partindo do princípio de que será explorada apenas a recuperação da independência estatística, a ideia principal para a solução proposta é tratar a derivada-temporal do sinal observado como uma mistura linear variante no tempo (mutuamente independente) das derivadas temporais das fontes. Como consequência é possível obter um modelo, onde a matriz de mistura é uma função das fontes.

Em outras palavras, a proposta é que as derivadas das fontes são localmente misturadas linearmente, mesmo que de maneira geral o modelo de mistura seja não linear. Para cada fonte a ser estimada, uma função não linear permanece como uma ambiguidade que não pode ser resolvida.

Portanto, se o mapeamento não linear é diferenciável em cada ponto, uma aproximação linear local pode ser estimada, envolvendo as derivadas das fontes e das observações (EHSANDOUST et al., 2017):

$$x_i(t) = f_i(s(t)) \implies \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial s_j} \frac{ds_j}{dt} \quad (3.1)$$

vetorialmente expresso por:

$$\implies \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{f};t}(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} \quad (3.2)$$

onde

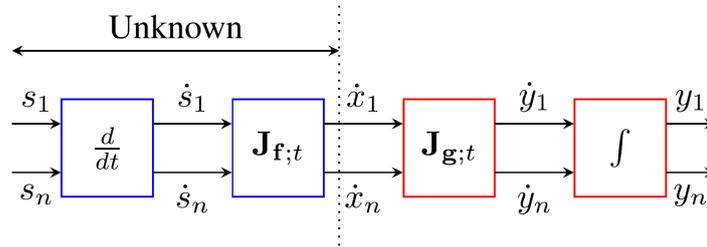
$$\mathbf{J}_{\mathbf{f};t}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

é a matriz Jacobiana da função de mistura não linear, e  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\dot{\mathbf{s}}$  são as derivadas no tempo (ou amostras) de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{s}$  respectivamente.

Note que  $\mathbf{J}_{\mathbf{f};t}(\mathbf{s})$  é o Jacobiano da função não linear e invariante no tempo  $\mathbf{f}(\cdot)$  e é uma função da fonte  $\mathbf{s}$ , entretanto, como o vetor fonte é um processo aleatório e varia com o tempo, os elementos de  $\mathbf{J}_{\mathbf{f};t}(\mathbf{s})$  também variam. Por isso  $t$  não aparece diretamente em 3.3 e é considerado um índice da matriz Jacobiana (não um argumento de entrada). Além disso, 3.2 é localmente um modelo de mistura linear instantâneo.

Assim, pode-se separar a mistura linear local das derivadas das fontes, usando uma técnica de BSS linear (porém adaptativa), seguida por uma etapa de integração para reconstruir os sinais.

Figura 3 – Transformação do modelo de BSS não linear em um modelo variante no tempo. (EHSANDOUST et al., 2017)



## 3.2 Definição e Separabilidade

Em (EHSANDOUST et al., 2017) são feitas algumas suposições para definir o problema abordado e a aplicação do algoritmo. Este problema é definido da seguinte maneira:

*Definição 1:* Seja  $\mathbf{s}$  um vetor  $n$ -dimensional.  $\mathbf{y} = \mathbf{c}(\mathbf{s})$  é chamado de “cópia não linear” de  $\mathbf{s}$ , se o mesmo possui a mesma dimensão que  $\mathbf{s}$  e cada um de seus elementos  $y_i$  é uma função não linear inversível de um e apenas um dos elementos de  $\mathbf{s}$ . Isto pode ser escrito como:

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad y_i = c_i(\mathbf{s}_{\mathcal{T}_i}) \quad (3.4)$$

onde  $c_i$  para  $i = 1, \dots, n$  é uma permutação de  $(1, 2, \dots, n)$ . Neste caso, a transformação  $\mathbf{c}(\cdot)$ , que é composta de funções não lineares e permutações, é chamada de “cópia não linear” ou de “mapeamento não linear trivial”.

Portanto, o problema pode ser definido da seguinte maneira. Seja um vetor de observação dado pela mistura não linear de uma fonte desconhecida  $\mathbf{s}(t)$ , ou equivalentemente

$$\forall i \quad x_i(t) = f_i(\mathbf{s}_i) \quad (3.5)$$

O problema de separação consiste em encontrar um mapeamento não linear  $\mathbf{g}$  como

$$\text{encontre } \mathbf{g} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathbf{c} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{c} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  é uma função de “cópia não linear”.

Para que o problema de separação proposto seja possível, é necessário que alguns critérios sejam atendidos:

1. O número de fonte é igual ao número de observações.
2.  $\mathbf{f}$  é inversível,
3.  $\mathbf{f}$  é sem memória,
4.  $\mathbf{f}$  é invariante no tempo,
5.  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^1$  (i.e. é diferenciável com derivada de primeira ordem contínua),
6. fontes  $\mathbf{s}_1(t), \dots, \mathbf{s}_n(t)$ , são diferenciáveis, portanto coloridas (essa suposição implica em continuidade e suavidade),
7. as derivadas das fontes  $\dot{\mathbf{s}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{s}}_n(t)$  são mutuamente independentes e,
8. no máximo, uma das derivadas das fontes segue uma distribuição Gaussiana.

Vale ressaltar que as suposições de 1 a 4 são suposições clássicas utilizadas em problemas de BSS, inclusive para os casos lineares. Podemos dizer que estas suposições são atendidas na maior parte das aplicações quando tratamos de sinais e misturas não lineares relacionadas a fenômenos físicos reais.

### 3.3 Algoritmos

#### 3.3.1 Adaptive Algorithm for Time-Variant Linear mixtures (AATVL)

Apesar do fato de que nesta abordagem é assumido que o mapeamento não linear, ou seja a função de mistura  $\mathbf{f}(\cdot)$  é invariante no tempo, o fato de  $\mathbf{s}$  variar no tempo implica que a mistura  $\mathbf{f}(\mathbf{s})$  também irá acompanhar estas variações. Lembrando que este modelo considera que  $\mathbf{f}(\cdot)$  é diferenciável, buscando que os sinais sejam separados localmente a partir das derivadas das fontes. Sendo assim, é necessária a utilização de um algoritmo capaz de se ajustar a cada nova amostra observada, portanto um algoritmo adaptativo.

A proposta dos autores é o chamado *Adaptive Algorithm for Time-Variant Linear mixtures* (AATVL) que utiliza a formulação do algoritmo EASI normalizado (2.18) para implementar o método de separação da estimativa da matriz de separação  $\mathbf{J}_{\mathbf{g};t}$ , devido a sua boa taxa convergência e custo computacional baixo. A equação de atualização de  $\mathbf{J}_{\mathbf{g};t}$  na forma da EASI normalizada, muito semelhante a equação (2.18) é dada como:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{g};t+1} = \mathbf{J}_{\mathbf{g};t} - \lambda_t \left[ \frac{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^T - \mathbf{I}}{1 + \lambda_t \mathbf{y}(t)^T \mathbf{y}(t)} + \frac{g(\mathbf{y}(t))\mathbf{y}(t)^T - \mathbf{y}(t)g(\mathbf{y}(t))^T}{1 + \lambda_t |\mathbf{y}(t)^T g(\mathbf{y}(t))|} \right] \mathbf{J}_{\mathbf{g};t} \quad (3.7)$$

Para cada iteração, é realizada a atualização do vetor de saída  $\hat{\mathbf{y}}$  da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{y}}(t+1) = \mathbf{J}_{\mathbf{g};t+1} \hat{\mathbf{x}}(t+1) \quad (3.8)$$

Por fim, é necessário um passo de integração para recuperar a “cópia não linear” dos sinais estimados. O Algoritmo 2 apresenta um resumo com as operações para implementação do AATVL.

---

**Algoritmo 2** Adaptive Algorithm for Time-Variant Linear mixtures (AATVL) (EHSANDOUST et al., 2017)

---

```

1:  $\dot{\mathbf{x}} \leftarrow$  Derivada (diferença) de  $\mathbf{x}$ .
2: procedure MÉTODO BSS LINEAR ADAPTATIVO( $\dot{\mathbf{x}}(t)$ )
3:    $\mathbf{J}_{\mathbf{g};0} \leftarrow$  Inicialização Aleatória
4:    $\hat{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{J}_{\mathbf{g};0} \dot{\mathbf{x}}(0)$ 
5:   for  $\hat{\mathbf{y}}(0) = 0, \dots, T-1$  do
6:      $\mathbf{J}_{\mathbf{g};t+1} \leftarrow$  Atualiza pela eq. (3.7)
7:      $\hat{\mathbf{y}}(t+1) \leftarrow$  Atualiza pela eq. (3.8)
8:   end for
9: end procedure
10:  $\mathbf{y} \leftarrow$  Integral de  $\hat{\mathbf{y}}$ 

```

---

Apesar de ser uma primeira abordagem para o problema, os autores ressaltam que as variações de  $\mathbf{J}_{\mathbf{f};t}(\mathbf{s}(t))$  são dependentes, tanto da não linearidade do modelo de mistura  $\mathbf{f}(\cdot)$  quanto da dinâmica das fontes  $\mathbf{s}(t)$ . Mesmo quando a função de mistura for definida por variações suaves, se as fontes forem caracterizadas por variações abruptas, o resultado da mistura também irá sofrer estas variações, não sendo possível acompanhar a matriz de separação através do algoritmo. Por este motivo, são impostas restrições como  $\mathbf{f}$  ser invariante no tempo e as fontes serem coloridas, implicando em uma característica suave para  $\mathbf{J}_{\mathbf{f};t}(\mathbf{s}(t))$  ao longo do tempo.

### 3.3.2 Batch Algorithm for Time-Invariant Nonlinear mixtures (BATIN).

O problema de convergência do Algoritmo 2 está associado ao fato do mesmo não explorar as principais características dos problema: a suavidade e invariância no tempo da função de mistura. Assim é necessário modificá-lo de forma a levar em conta o aprendizado do modelo não linear para diferentes amostras obtidas.

A solução sugerida em (EHSANDOUST et al., 2017) é a introdução de uma etapa de regressão não linear utilizando o método de suavização por *splines* (*smoothing splines* (REINSCH, 1967)), sendo o algoritmo resultante chamado de *Batch Algorithm for Time-Invariant Nonlinear mixtures* (BATIN). A partir dos coeficientes estimados da matriz de separação  $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{g};t}(\mathbf{x}(t))$  obtidos pela etapa de BSS linear adaptativa, o modelo

não linear  $\mathbf{J}_{\mathbf{g}:t}(\mathbf{x})$  é aprendido utilizando-se do método de suavização por *splines*. Em seguida, o modelo aprendido é utilizado na separação das fontes, e posteriormente aplicada a integração das derivadas das fontes estimadas. O Algoritmo 3 apresenta as operações descritas para aplicação do BATIN.

---

**Algoritmo 3** *Batch Algorithm for Time-Invariant Nonlinear mixtures*(BATIN). (EHSANDOUST et al., 2017)

---

```

1:  $\dot{\mathbf{x}} \leftarrow$  Derivada (diferença) de  $\mathbf{x}$ .
   Etapa BSS Linear Adaptativo:
2: procedure MÉTODO BSS LINEAR ADAPTATIVO( $\dot{\mathbf{x}}(t)$ )
3:    $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(0)) \leftarrow$  Inicialização Aleatória
4:    $\dot{\mathbf{y}}(0) = \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(0))\dot{\mathbf{x}}(0)$ 
5:   for  $t = 0, \dots, T - 1$  do
6:      $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t + 1)) \leftarrow$  Atualiza pela eq. (3.7)
7:      $\dot{\mathbf{y}}(t + 1) \leftarrow$  Atualiza pela eq. (3.8)
8:   end for
9: end procedure
   Etapa Separação não linear:
10: procedure REGRESSÃO NÃO LINEAR( $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t)$ )
11:    $\mathbf{J}_{\mathbf{g}:t}(\mathbf{x}) \leftarrow$  Suavização por Spline de  $\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t))$ 
12: end procedure
13: for  $t = 1, \dots, T$  do
14:    $\dot{\mathbf{y}}(t) \leftarrow \mathbf{J}_{\mathbf{g}:t}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}(t)$ 
15: end for
16:  $\mathbf{y} \leftarrow$  Integral de  $\dot{\mathbf{y}}$ 

```

---

Vale ressaltar que os métodos EASI normalizado e suavização por *splines* podem ser substituídos por equivalentes, onde outros métodos de BSS linear adaptativo ou regressão não linear podem ser utilizados em suas respectivas etapas do algoritmo BATIN.

## 4 Simulação e Resultados

Neste capítulo, a partir da implementação dos algoritmos descritos no Capítulo 2, são apresentados os resultados das simulações realizadas para verificação dos conceitos relacionados a solução do problema de BSS.

Todas as simulações foram feitas através do *software* MATLAB, onde os algoritmos foram escritos e executados, com base apenas no descritivo matemático apresentado nas referências e resumido neste trabalho ao longo do Capítulo 2, com exceção da etapa de regressão não linear onde utilizou-se um função do próprio *software* (melhor descrito na seção 4.2.3). O uso do MATLAB permitiu a geração dos gráficos apresentados, além de proporcionar a facilidade de trabalhar com expressões próximas da notação vetorial apresentada.

### 4.1 Misturas Lineares

#### 4.1.1 FastICA

Foi implementado num ambiente de simulação o Algoritmo 1, descrito no Capítulo 8 de (HYVÄRINEN; KARHUNEN; OJA, 2001), Tabela 8.4, chamado de FastICA. Através de sua rápida convergência e eficiência computacional, é possível estimar as componentes independentes de uma dada mistura de sinais.

Para verificar o funcionamento do algoritmo, foram gerados dois vetores  $\mathbf{s}_1(t)$  e  $\mathbf{s}_2(t)$ , compostos por 5000 pontos de realizações de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $[-1,1]$ .

O processo de mistura foi dado na forma linear como mostrado equação (2.2), onde os coeficientes da matriz de mistura  $\mathbf{A}$  foram escolhidos de forma aleatória. Para a simulação ilustrada os coeficientes sorteados foram:

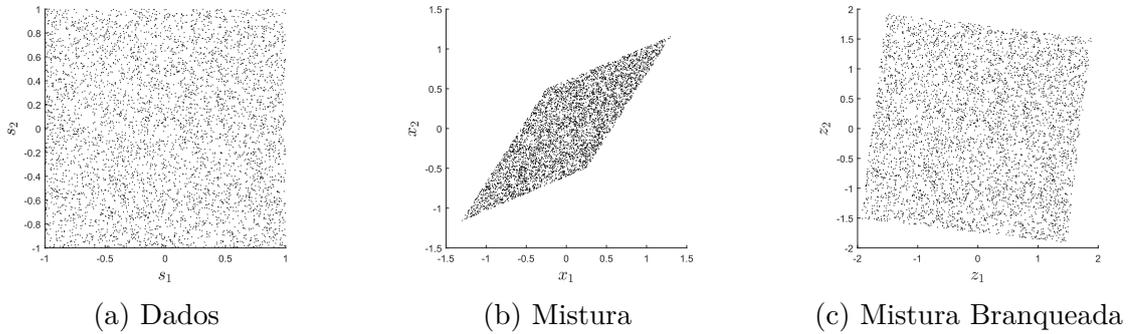
$$A = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.53 \\ 0.33 & 0.83 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Assim, a expressão da mistura pode ser expandida da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.53 \\ 0.33 & 0.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A Figura 4a ilustra a distribuição dos dados gerados para as fontes  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$ . Pode ser observado que as fontes apresentam uma distribuição uniforme entre  $[-1,1]$ .

Figura 4 – Gráfico de distribuição conjunta (a) das fontes, (b) processo de mistura, (c) e branqueamento.

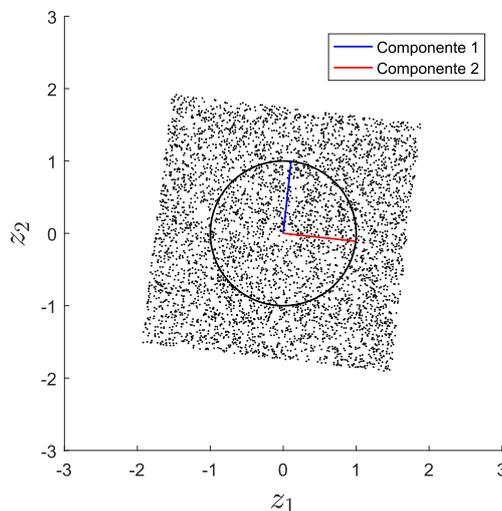


O resultado da mistura é ilustrado pela Figura 4b. A mudança da forma da distribuição assumindo a forma de um paralelogramo indica que  $x_1$  e  $x_2$  não são independentes; é possível prever o valor de  $x_1$  dado o conhecimento sobre  $x_2$ .

Por esse motivo, a etapa de branqueamento é importante para que  $x_1$  e  $x_2$  tornem-se descorrelacionados. Utilizando a metodologia descrita em 2.1.3 aplicada aos sinais de mistura  $x_1$  e  $x_2$ , obtém-se os vetores  $z_1$  e  $z_2$ , referente aos sinais branqueados. A distribuição conjunta destes sinais é ilustrada na Figura 4c. Percebe-se que o quadrado que define a distribuição conjunta é uma versão rotacionada dos dados originais. Resta agora ao algoritmo FastICA estimar o ângulo desta rotação.

O resultado da aplicação do FastICA e a estimativa das componentes independentes encontradas é ilustrado pela Figura 5.

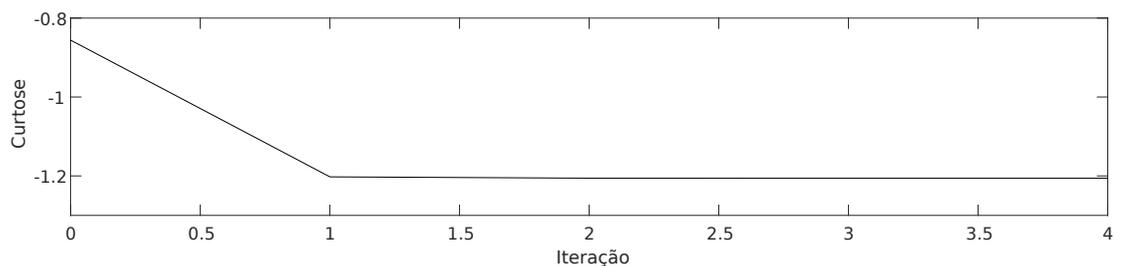
Figura 5 – Componentes estimadas através do algoritmo FastICA sobre os dados branqueados.



Da Figura 5, é possível verificar que as componentes foram estimadas corretamente. Os vetores  $w_1$  e  $w_2$  representam as direções em que o algoritmo convergiu e para o qual a mistura apresenta a maior não-gaussianidade, e portanto maior independência.

A convergência da estimação dos componentes ocorre com o aumento do número de iterações do algoritmo. Entretanto não são necessárias muitas iterações para que isso ocorra. A Figura 6 apresenta a evolução do valor da medida de curtose para a primeira componente ao longo das iterações.

Figura 6 – Convergência da Curtose ao longo das iterações.



É possível perceber que o algoritmo converge rapidamente, onde da primeira para a segunda iteração, ocorre pouca variação na curtose. Sendo assim, a partir da terceira iteração, pode-se dizer que o algoritmo convergiu, e que a direção da primeira componente independente foi encontrada.

## 4.2 Misturas Não Lineares

As simulações associadas a misturas não lineares foram feitas com base nos algoritmos apresentados no capítulo 3. Foi gerado um conjunto de sinais (fontes), bem como dois mapeamentos não lineares diferentes para avaliar o desempenho de ambos os algoritmos (AATVL e BATIN). Estas simulações foram feitas baseadas nas simulações propostas em (EHSANDOUST et al., 2017).

Os sinais de fontes gerados  $s_1$  e  $s_2$  utilizados nas misturas são as integrais de uma onda senoidal, e uma onda triangular respectivamente, dadas pela seguinte expressão:

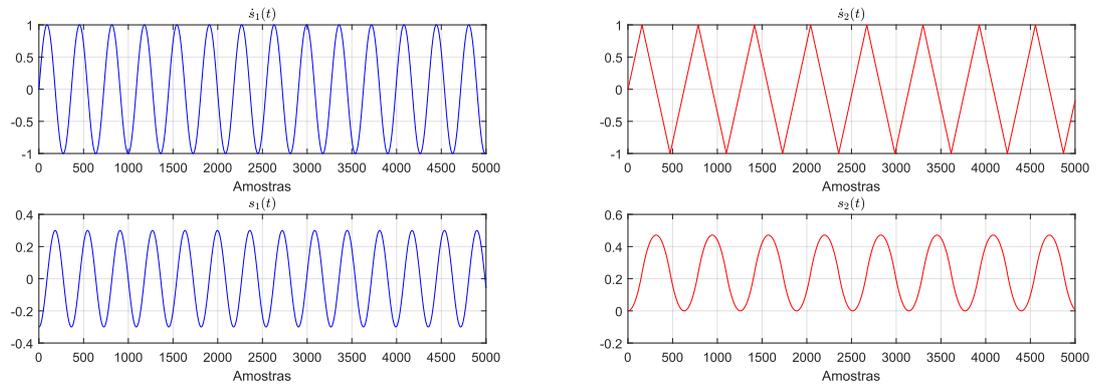
$$\dot{s}_1(t) = \sin(\sqrt{3}t/100) \Rightarrow s_1(t) \propto \int \dot{s}_1(t) dt \quad (4.3)$$

$$\dot{s}_2(t) = \text{saw}(t/100) \Rightarrow s_s(t) \propto \int \dot{s}_2(t) dt \quad (4.4)$$

Note que a expressão dada é para a derivada do sinal, sendo os sinais utilizados como fonte o resultado de suas integrais. A integração é obtida através da noção de soma

recursiva  $s(t) = \dot{s} + s(t - 1)$  , e serve como estimativa para as integrais temporais. A Figura 7 ilustra as formas de onda dos sinais  $s_1$  e  $s_2$  e suas derivadas.

Figura 7 – Sinais utilizados na mistura



Os modelos de misturas gerados foram obtidos a partir de dois mapeamentos não lineares diferentes. A primeira mistura é obtida pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha(\mathbf{s}(t)) & -\sin \alpha(\mathbf{s}(t)) \\ \sin \alpha(\mathbf{s}(t)) & \cos \alpha(\mathbf{s}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde  $\alpha(\mathbf{s}(t))$  é obtido por:

$$\alpha(\mathbf{s}(t)) = \alpha_0 + \gamma \times \sqrt{s_1^2(t) + s_2^2(t)} \quad (4.6)$$

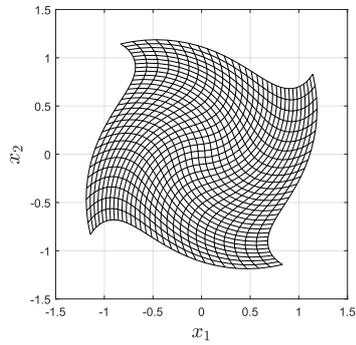
sendo  $\alpha_0$  e  $\gamma$  parâmetros de ajuste, mantidos como  $\alpha_0 = 0$  e  $\gamma = 1$ , durante as simulações.  $\gamma$  especificamente, pode ser dito como a variável que determina o nível de não linearidade do modelo. Caso este parâmetro apresentasse seu valor  $\gamma = 0$ , trataríamos de uma mistura linear.

A segunda mistura, foi realizada a partir da seguinte expressão:

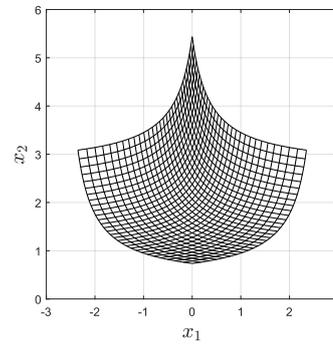
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{s_1(t)} - e^{s_2(t)} \\ e^{-s_1(t)} + e^{-s_2(t)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Assim, ambos os modelos de mistura podem ser ditos inversíveis, não impactando na independência estatística dos sinais, que será utilizado como critério de separação. A Figura 8 ilustra a transformação de uma grade das funções utilizadas nos modelos de mistura.

Figura 8 – Mapeamentos não lineares utilizados (a) do modelo de mistura (4.5) (b) do modelo de mistura (4.7)



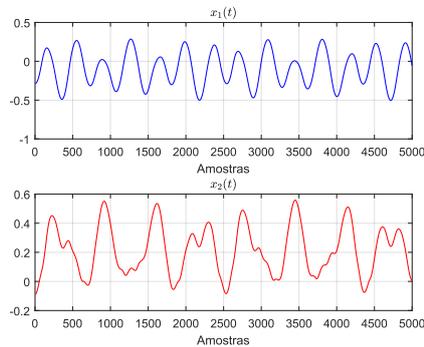
(a) Modelo de mistura (4.5)



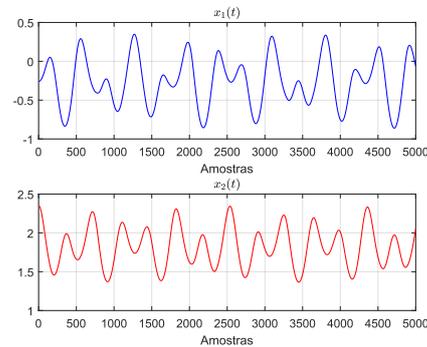
(b) Modelo de mistura (4.7)

Como resultado da mistura, utilizando ambos os mapeamentos, é possível obter a visualização das formas de onda dos sinais misturados  $x_1$  e  $x_2$ , sendo estas apresentadas na Figura 9.

Figura 9 – Formas de onda dos sinais misturados  $x_1$  e  $x_2$  para (a) o modelo de mistura (4.5) e (b) o modelo de mistura (4.7)



(a) Modelo de mistura (4.5)



(b) Modelo de mistura (4.7)

Portanto, os sinais  $x_1$  e  $x_2$  obtidos a partir das misturas (Figura 9) serão as entradas dos algoritmos, sendo estes os sinais misturados que devem ser separados e que foram testados na tarefa de realizar a separação das fontes.

#### 4.2.1 N-EASI

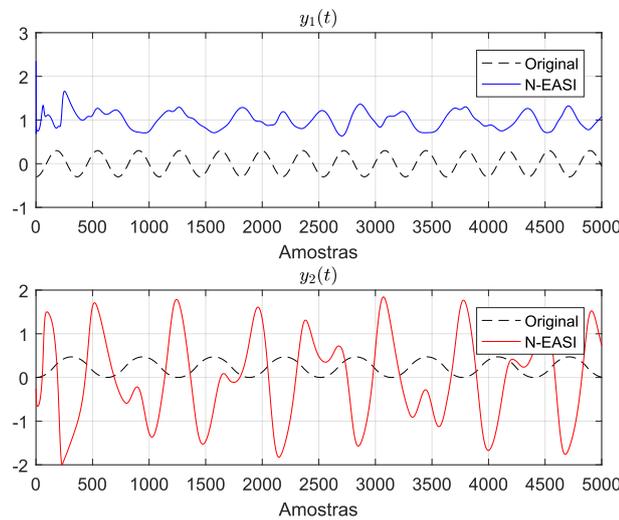
Para verificar que a abordagem de BSS Linear não é capaz de realizar a separação da mistura dos sinais, dado que o mapeamento utilizado é não linear, foi utilizado o algoritmo EASI em sua forma normalizada (N-EASI) para separar os sinais  $x_1$  e  $x_2$  obtidos pela mistura (4.7). O algoritmo N-EASI, também foi utilizado na implementação da etapa de BSS linear adaptativa exigidos pelos algoritmos AATVL e BATIN, e por isso pôde ser utilizado diretamente para realizar esta simulação.

A formulação do N-EASI (2.18), exige uma função não linear  $\mathbf{g}(\cdot)$ . Tanto nesta simulação, quanto nas seguintes, a função  $\hat{\mathbf{g}}(\cdot)$  escolhida foi  $\mathbf{g}(y) = \mathbf{y}^3$ . Já o parâmetro de adaptação  $\lambda_t$ , variando ao longo do tempo, foi implementado na simulação como proposto em (EHSANDOUST et al., 2017), com a seguinte relação:

$$\lambda_t = \begin{cases} 1/t, & 1 \leq t \leq 1000 \\ 1/1000, & 1000 < t \end{cases} \quad (4.8)$$

A Figura 10 mostra o resultado obtido na separação pelo algoritmo N-EASI

Figura 10 – Comportamento do algoritmo N-EASI Linear na tentativa de separação, para o modelo de mistura (4.7)

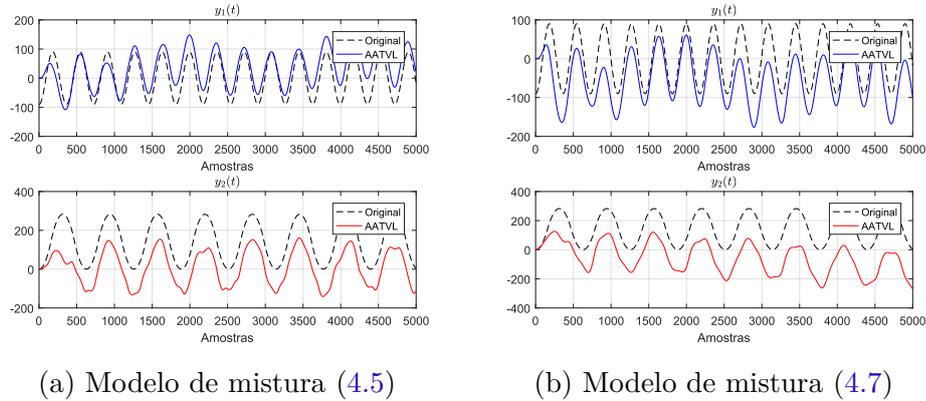


Da Figura 10 pôde ser observado portanto que o N-EASI não é capaz de realizar a separação das fontes corretamente, já que o mesmo nunca converge.

#### 4.2.2 AATVL

Utilizando o Algoritmo 2 (AATVL), foi testada sua capacidade de separação, a partir dos sinais misturados  $x_1$  e  $x_2$  para cada um dos modelos de misturas apresentados, na tentativa de estimar  $s_1$  e  $s_2$  através dos sinais resultantes  $y_1$  e  $y_2$ . O resultado do uso deste algoritmo é apresentado na Figura 11.

Figura 11 – Estimativas com AATVL dos sinais recuperados  $y_1$  e  $y_2$  para (a) o modelo de mistura (4.5) e (b) o modelo de mistura (4.7)



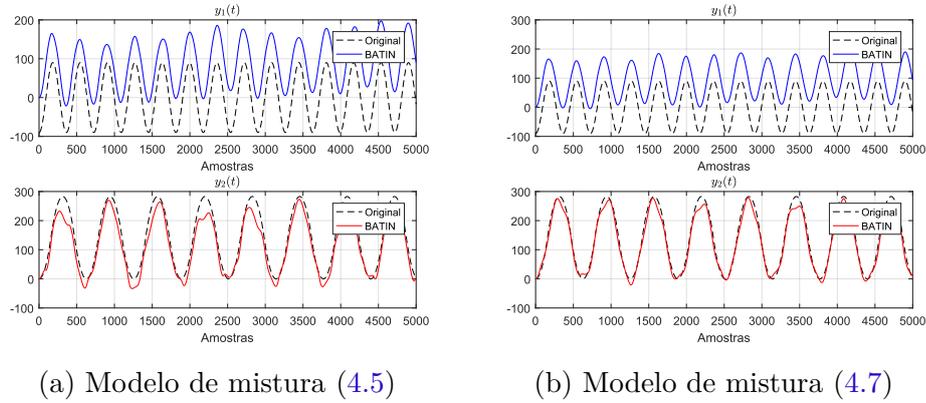
A Figura 11 apresenta a saída do algoritmo AATVL e portando os sinais recuperados. Pode ser observado que a recuperação dos sinais é aproximada, tendo em vista uma primeira abordagem. Apesar de ser possível identificar visualmente certa distorção nos sinais recuperados e também, uma baixa frequência indesejada em  $s_1$  para ambos os mapeamentos, em relação ao uso do algoritmo anterior (N-EASI), é possível dizer que houve uma recuperação das fontes.

### 4.2.3 BATIN

Da mesma maneira que para o AATVL, o Algoritmo 3 (BATIN) foi utilizado também na separação das mesmas misturas, para ambos os modelos não lineares.

Em relação a etapa de regressão não linear, foi utilizada a suavização por *splines*. Através da função *tpaps*, que implementa uma suavização do tipo *Thin-plate splines* fornecida pelo próprio MATLAB foi possível realizar a regressão não linear, necessária para estimar o comportamento do mapeamento não linear atribuído. A Figura 12 apresenta o resultado da simulação.

Figura 12 – Estimativas com BATIN dos sinais recuperados  $y_1$  e  $y_2$  para (a) o modelo de mistura (4.5) e (b) o modelo de mistura (4.7)

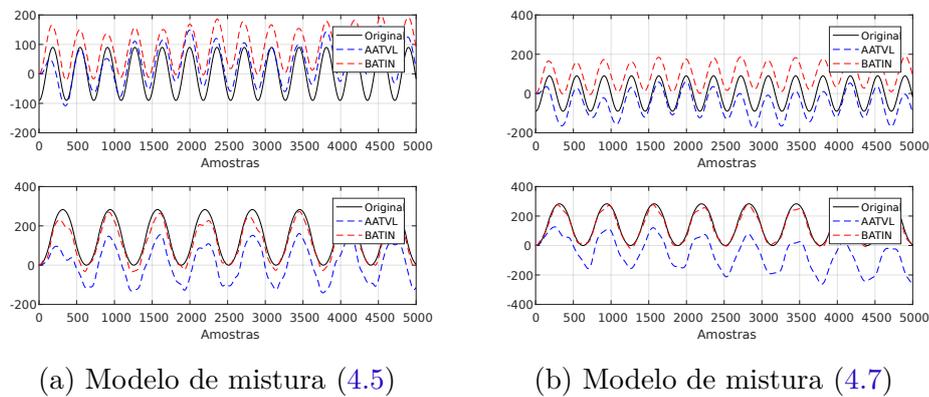


O resultado apresentado na Figura 12 é consideravelmente melhor que o apresentado pelos demais algoritmos. Da observação das formas de onda apresentadas, o comportamento dos sinais recuperados é muito próximo dos originais. Em termos da frequência dos sinais apresentado, ambas as fontes recuperadas seguem próximas das originais. Para ambos os mapeamentos a recuperação da fonte  $s_1$  ( $y_1$ ) obteve uma grande redução no efeito de uma baixa frequência apresentada antes pelo algoritmo AATVL, sendo praticamente recuperada a menos de um *offset*. Já a fonte  $s_2$  ( $y_2$ ), apresentou grandes melhorias em relação às distorções apresentadas, sendo melhor estimada em ambos os mapeamentos pelo algoritmo BATIN.

#### 4.2.4 Comparação dos resultados

Os resultados obtidos para os algoritmos utilizados, foram comparados de forma gráfica, ilustrado através da Figura 13.

Figura 13 – Comparativo do resultado dos algoritmos AATVL e BATIN para os sinais recuperados (a) o modelo de mistura (4.5) e (b) o modelo de mistura (4.7)



Como esperado, o algoritmo BATIN apresenta um melhor desempenho em ambos os mapeamentos apresentados. Isso se deve ao fato de que foi considerado o problema de convergência na execução do algoritmo BATIN, e a introdução de uma etapa de regressão não linear, implica na suavização da variação das estimativas de  $\mathbf{J}_{\mathbf{g}:t}$ , explorando a característica de variância do modelo de mistura.

## 5 Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foi possível o estudo do problema de separação cega de fontes de uma maneira aprofundada. Foram abordados os conceitos fundamentais que deram origem a este ramo de processamento de sinais, e também avançar para as abordagens recentes no que diz respeito a este tema.

Algoritmos diferentes foram avaliados na resolução do problema de separação cega, tanto para modelos lineares quanto para modelos não lineares. O FastICA, um dos primeiros algoritmos na solução do caso linear, pôde ser estudado, onde os principais conceitos associados, desde os critérios de separabilidade, às medidas de não gaussianidade, puderam ser explorados.

Uma revisão das abordagens existentes para o estudo do caso não linear pôde ser realizada, sendo importante destacar que há modelos não lineares (PNL e LQ), em que há a possibilidade de separação através de métodos de BSS Lineares. Em estudos mais recentes, a suposição de tratar a derivada temporal das fontes como uma mistura linear variante no tempo, permite o desenvolvimento de algoritmos que apresentam resultados promissores para este tipo de abordagem. A partir implementação dos algoritmos propostos por (EHSANDOUST et al., 2017), foi possível verificar seu desempenho, para diferentes tipos de mapeamentos não lineares, onde o algoritmo BATIN se sobressai devido a implementação de uma etapa de regressão não linear.

Por fim, a possibilidade de explorar a abordagem utilizada em trabalhos futuros é promissora. O desempenho do algoritmo BATIN, pode ser melhorado na busca da implementação de um melhor modelo de regressão não linear. Além disso a aplicação dos conceitos estudados para dados reais, pode incentivar a elaboração de algoritmos para tarefas específicas, ou ainda testar a utilização desta abordagem em diferentes modelos.

# Referências

- AI, A. et al. A general framework for second-order blind separation of stationary colored sources. *Signal Processing*, Elsevier, v. 88, n. 9, p. 2123–2137, 2008. Citado na página 7.
- ANS, B.; HERAULT, J.; JUTTEN, C. Adaptive neural architectures: detection of primitives. *COGNITIVA '85*, p. 593–597, 1985. Citado na página 6.
- BABAIE-ZADEH, M. *On blind source separation in convolutive and nonlinear mixtures*. Tese (Doutorado) — Ph. D. Thesis, INP Grenoble, 2002. Citado na página 7.
- CARDOSO, J.-F.; LAHELD, B. H. Equivariant adaptive source separation. *IEEE Transactions on signal processing*, IEEE, v. 44, n. 12, p. 3017–3030, 1996. Citado na página 13.
- COMON, P. Independent component analysis, a new concept? *Signal processing*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 287–314, 1994. Citado na página 10.
- CONDURACHE, A. P. *A Tutorial on Blind Source Separation using Independent Component Analysis and Related Methods*. [S.l.], 2015. Citado na página 6.
- DUARTE, L. T. et al. Blind source separation of overdetermined linear-quadratic mixtures. In: SPRINGER. *International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation*. [S.l.], 2010. p. 263–270. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- DUARTE, L. T. et al. Blind compensation of nonlinear distortions: Application to source separation of post-nonlinear mixtures. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 60, n. 11, p. 5832–5844, 2012. Citado na página 7.
- EHSANDOUST, B. et al. Blind source separation in nonlinear mixtures: separability and a basic algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 65, n. 16, p. 4339–4352, 2017. Citado 10 vezes nas páginas 2, 3, 7, 17, 18, 20, 21, 24, 27 e 31.
- HYVÄRINEN, A.; KARHUNEN, J.; OJA, E. *Independent Component Analysis*. Wiley, 2001. (Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control Series). ISBN 9780471405405. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=8EbJkwEACAAJ>>. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 12 e 22.
- ILIN, A.; HONKELA, A. Post-nonlinear independent component analysis by variational bayesian learning. In: SPRINGER. *International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*. [S.l.], 2004. p. 766–773. Citado na página 14.
- JIMENEZ, G. B. *Non-linear blind signal separation for chemical solid-state sensor arrays*. Tese (Doutorado) — Universitat Politècnica de Catalunya, 2006. Citado na página 14.
- MERRIKH-BAYAT, F.; BABAIE-ZADEH, M.; JUTTEN, C. Linear-quadratic blind source separating structure for removing show-through in scanned documents. *International Journal on Document Analysis and Recognition (IJDAR)*, Springer, v. 14, n. 4, p. 319–333, 2011. Citado na página 14.

- PARASHIV-IONESCU, A. et al. High performance magnetic field smart sensor arrays with source separation. In: *Proc. of the 1st Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems, MSM*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 98, p. 666–671. Citado na página 13.
- PRAKRIYA, S.; HATZINAKOS, D. Blind identification of lti-zmnl-lti nonlinear channel models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, IEEE, v. 43, n. 12, p. 3007–3013, 1995. Citado na página 13.
- REINSCH, C. H. Smoothing by spline functions. *Numerische mathematik*, Springer, v. 10, n. 3, p. 177–183, 1967. Citado na página 20.
- ROJAS, F. et al. Nonlinear blind source separation using genetic algorithms. In: *Proc. Int. Conf. on Independent Component Analysis and Signal Separation (ICA2001)*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 400–405. Citado na página 14.
- SUYAMA, R. et al. Proposta de metodos de separação cega de fontes para misturas convolutivas e não-lineares. [sn], 2007. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- TALEB, A.; JUTTEN, C. Nonlinear source separation: The post-nonlinear mixtures. In: CITESEER. In: *Proceedings of the ESANN'97*. [S.l.], 1997. Citado na página 13.
- TALEB, A.; JUTTEN, C. Source separation in post-nonlinear mixtures. *IEEE Transactions on signal Processing*, IEEE, v. 47, n. 10, p. 2807–2820, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 14.