

Universidade Federal do ABC  
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais  
Aplicadas  
Curso de Engenharia de Informação

André Lucas de Oliveira Duarte

**Filtros de partículas para equalização de canais de  
comunicação**



Santo André - SP  
Agosto de 2016

# Filtros de partículas para equalização de canais de comunicação

André Lucas de Oliveira Duarte

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Informação

Orientado por Prof. Dr. Claudio José Bordin Júnior



Universidade Federal do ABC

Santo André - SP  
Agosto de 2016

## Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Claudio Jose Bordin Júnior, pela disposição, comprometimento, ensinamentos, correções, observações e incontáveis reuniões que foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, pela minha criação e por todos os anos de apoio, sem eles não estaria aqui hoje.

Aos professores Dr. Irineu Antunes Junior e Dr. Murilo Bellezoni Loiola pela participação na banca examinadora deste trabalho.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Formulação do Problema . . . . .	3
1.1.1	Receptor MAP . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Técnicas Clássicas de Equalização</b>	<b>8</b>
2.1	Estimativa MAP treinada via <i>Grid Filter</i> . . . . .	8
2.2	Equalizador MMSE Linear . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Filtros de Partículas</b>	<b>12</b>
3.1	Equalização Cega de um Canal SISO utilizando Filtro de Partículas Rao-Blackwellizado . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Equalização Cega de Sistemas SIMO Sob Ruído Correlacionado</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Simulações Computacionais</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Filtro de Kalman</b>	<b>28</b>

## Resumo

Neste trabalho, analisa-se o problema de equalização de canais de comunicação seletivos em frequência com uma entrada e múltiplas saídas (SIMO - *Single-Input, Multiple-Output*) sujeitas a ruído aditivo correlacionado. Tal modelo de sinal emerge, dentre outras possibilidades, ao se sobrearmos a saída de um filtro casado, como os comumente utilizados em sistemas de comunicação digital linear. Desenvolveu-se um novo algoritmo de equalização cega baseado num Filtro de Partículas Rao-Blackwellizado adaptado ao modelo considerado. Para se estabelecerem referenciais de desempenho, foram também implementados algoritmos de equalização clássicos, ótimos segundo os critérios MMSE (*Minimum Mean-Square Error*) e MAP (*Máximo a Posteriori*) para o modelo de sinal em questão. O desempenho dos algoritmos implementados foi avaliado através de simulações numéricas utilizando dados sintéticos. Observou-se nas simulações que a utilização de algoritmos de equalização desajustados ao modelo de sinal, que não levam corretamente em consideração as propriedades do ruído aditivo, produz uma severa degradação de desempenho.

**Palavras-Chave:** Equalização, Equalização Cega, Filtros de Partículas, Estimação, Métodos Bayesianos, Comunicação Digital, Processamento de Sinais.

## Abstract

In this work, we analyze the problem of blind equalization of frequency selective channels with a single input and multiple outputs (SIMO) subject to correlated additive noise. Such model emerges, among other possibilities, when the output of a matched filter, as those commonly employed in linear digital communications systems, is oversampled. We developed a novel blind equalization algorithm based on a Rao-Blackwellized Particle Filter adapted to the presumed signal model. To establish performance reference levels, we also implemented classical equalization algorithms optimal in the MAP (Maximum a Posteriori) and MMSE (Minimum Mean-Square Error) senses for the assumed signal model. We evaluated the performance of the aforementioned algorithms via numerical simulations employing synthetic data. Simulation results indicated that the use of equalization algorithms that assume mismatched noise models leads to severe performance penalties.

**Keywords:** Equalization, Blind Equalization, Particle Filters, Estimation, Bayesian Methods, Digital Communication, Signal Processing.

# NOTAÇÃO

$\sim$	Indica que a variável é uma amostra da densidade
$\propto$	Proporcional
$\mathbf{0}$	Matriz Nula
$a_{k:i}$	Sequência $a_{k:i} \triangleq (a_k, a_{k+1}, \dots, a_i)^T$ , $k < i$
$b_n$	Bit Transmitido no Instante n
$A$	Matriz A
$A^T$	Matriz Transposta de A
$A^{-1}$	Inversa da Matriz A
$\delta(\cdot)$	Delta de Dirac
$\eta$	Densidade Espectral de Potência do Ruído
$I$	Matriz Identidade
$L$	Tamanho do Canal
$\mathcal{N}(a_n \mu, \Sigma)$	$a_n$ tem distribuição gaussiana (possivelmente) multivariada com vetor média $\mu$ e matriz de covariância $\Sigma$
$p(x)$	Função de Massa de Probabilidade ou Função Densidade de Probabilidade
$P$	Número de Partículas
$R$	Número de Subcanais
$\mathbb{R}^L$	Conjunto das L-úplas de Números Reais
$s_n$	Símbolo Transmitido no Instante n
$x_n$	Vetor Coluna $x_n \triangleq [s_n \ s_{n-1} \ \dots \ s_{n-L+1}]^T$
$x_{0:n}$	Sequência $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

## SIGLAS E ABREVIACOES

ASK	<i>Amplitude Shift Keying</i>
BER	<i>Bit Error Rate</i>
BPSK	<i>Binary Phase Shift Keying</i>
DBPSK	<i>Differential Binary Phase Shift Keying</i>
f.m.p.	Função de Massa de Probabilidade
f.d.p.	Função Densidade de Probabilidade
i.i.d.	Independente e Identicamente Distribuído
ISI	<i>Intersymbol Interference</i>
MAP	<i>Máximo a Posteriori</i>
MMSE	<i>Minimum Mean-Square Error</i>
SIMO	<i>Single-Input, Multiple-Output</i>
SISO	<i>Single-Input, Single-Output</i>
QAM	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>

# Capítulo 1

## Introdução

A necessidade cada vez maior de altas taxas de transmissão faz com que sistemas de comunicação se tornem mais sofisticados e complexos, com técnicas de comunicação digital se sobressaindo em relação aos métodos analógicos [1]. Considere a figura abaixo, que contém um diagrama de blocos ilustrando os componentes fundamentais de um sistema de comunicação digital [2]

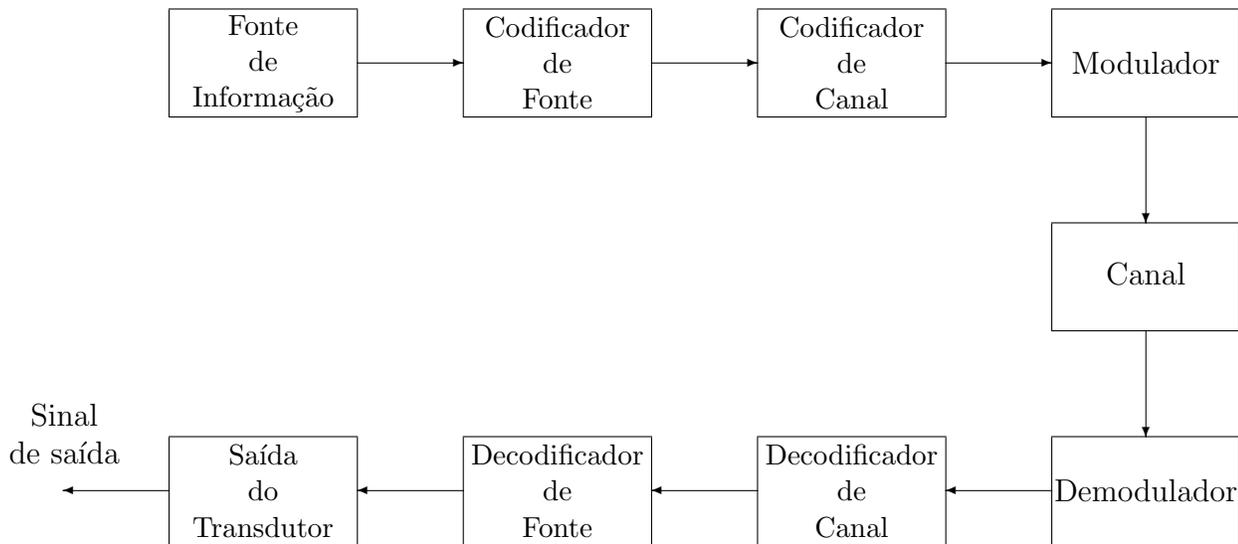


Figura 1.1: Elementos básicos de um sistema de comunicação digital.

Em sistemas de comunicação práticos, o sinal transmitido é corrompido por ruído e interferências de diferentes tipos [1]. Caso o canal - meio físico utilizado para a transmissão do sinal - seja seletivo em frequência [2], ocorrerá o fenômeno conhecido

por Interferência Intersimbólica (ISI). O uso de equalização - processo no qual os efeitos introduzidos pelo canal sobre o sinal transmitido são revertidos - no bloco Demodulador da Figura 1.1, permite mitigar os efeitos da ISI.

Enquanto métodos tradicionais de equalização, ditos *treinados*, requerem o envio de sequências conhecidas ou *de treinamento*, para que o receptor, de posse da entrada e da saída do canal, estime os coeficientes da resposta ao impulso do canal, técnicas de equalização não-treinada ou *cega* [3], não fazem uso dessas sequências, sendo portanto preferíveis do ponto de vista de eficiência, aos custos de, em geral, um aumento na complexidade computacional. Isso acontece pois, se o canal for variante no tempo, as sequências de treinamento devem ser enviadas periodicamente, o que diminui a taxa de dados útil transmitida pelo canal [4]. Uma descrição detalhada sobre cada bloco da Figura 1.1 pode ser encontrada em [2].

Nas últimas décadas, desenvolveu-se uma infinidade de algoritmos para equalização cega, vide [3] para uma revisão sobre o assunto. *Filtros de partículas* [5], que são técnicas para a solução de problemas de estimação em que as observações são relacionadas a um vetor de estados por uma relação não-linear [6,7], podem ser utilizados para o desenvolvimento de métodos de equalização cega.

Neste trabalho, é desenvolvido um novo algoritmo para equalização cega num modelo de sinal com múltiplas saídas (*Single-Input, Multiple-Output* - SIMO) baseado num filtro de partículas Rao-Blackwellizado [5]. O desempenho deste algoritmo é comparado ao de métodos clássicos de equalização, como o Equalizador Linear MMSE [8] e o Filtro em Grelha (*Grid Filter*) [9]. Especificamente, o modelo SIMO considerado surge ao se sobreamostrar o sinal recebido; modelos semelhantes, porém, podem ser obtidos ao se utilizar outras técnicas de *diversidade*, como por exemplo diversidade espacial [2].

A principal motivação para este estudo, é o fato dos algoritmos para equalização cega não necessitarem do envio periódico de sequências de treinamento, trazendo como consequências:

- A taxa útil de transmissão é aumentada, pois dados podem ser transmitidos durante o período que seria reservado para a transmissão da sequência de treinamento.
- Métodos treinados podem não ser capazes de se recuperar caso haja uma variação súbita dos parâmetros do canal antes da recepção de uma nova sequência de treinamento, fazendo com que os dados transmitidos após esse evento sejam

perdidos. Na hipótese de uso de um equalizador cego, esses dados poderiam ser recuperados.

- Às vezes, em redes *broadcast*, em que um transmissor envia dados para vários receptores, se um receptor não conseguir estimar o canal satisfatoriamente, será necessário aguardar a próxima transmissão da sequência de treinamento, o que acarretaria na perda de todos os dados transmitidos durante a espera. Uma possível solução para sistemas com canal de retorno, seria requisitar a retransmissão da sequência de treinamento; se isso ocorrer frequentemente, porém, a eficiência do sistema será baixa. Métodos de equalização cega permitem mitigar este problema.
- Em contrapartida, métodos cegos apresentam um maior tempo de convergência e encarretam num aumento da complexidade computacional em comparação com métodos treinados, devido ao fato de, em geral, lidarem com inversões de matrizes.

O texto a seguir está organizado da seguinte forma: a formulação matemática do problema tratado é descrita na Seção 1.1. Técnicas clássicas de equalização treinada, utilizadas para comparação de desempenho, são introduzidas no Capítulo 2. No Capítulo 3, por sua vez, é apresentada a técnica de filtragem de partículas, inicialmente para a solução de problemas de estimação genéricos e, posteriormente, aplicada ao problema de equalização cega de um canal com única saída (SISO). A principal contribuição deste trabalho, que foi o desenvolvimento de um novo algoritmo de equalização cega para canais SIMO sob ruído correlacionado utilizando filtros de partículas, é descrita no Capítulo 4. Em seguida, no Capítulo 5, o desempenho dos diversos métodos é avaliado através de simulações numéricas e, finalizando o texto, as conclusões do trabalho são relatadas no Capítulo 6.

## 1.1 Formulação do Problema

Considere o sistema de comunicação mostrado na Figura 1.2, que pode ser utilizado em esquemas de modulação digitais lineares, bastando-se para isso ajustar  $s_k$  de forma apropriada.

O bloco denotado por Mudança de Medida faz com que a sequência de símbolos transmitidos  $s_k$  - que, numa modulação BPSK por exemplo, assumiria valores do

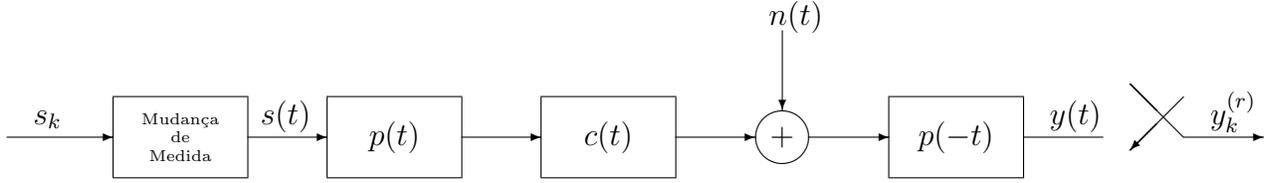


Figura 1.2: Modelo de sistema de comunicação

conjunto  $\{+1, -1\}$  - sejam convertidos num trem de impulsos  $s(t)$ . Então, esse trem de impulsos passa pelo filtro de pulsos  $p(t)$  e entra no canal  $c(t)$ . Adiciona-se ao sinal ruído branco  $n(t)$  que então vai para o filtro casado  $p(-t)$  [2]. De acordo com o modelo, uma estimativa dos símbolos transmitidos é obtida amostrando-se a saída do filtro  $p(-t)$ . Ao se amostrar  $y(t)$  à taxa de símbolos, pode-se mostrar que, caso  $p(t)$  satisfaça o Critério de Nyquist, o ruído na saída do amostrador é branco [2]. Porém, caso a amostragem seja realizada a taxas múltiplas da taxa de símbolos, as amostras de ruído serão correlacionadas. Neste caso, pode-se efetuar uma *decomposição polifásica* [10] do sinal sobreamostrado, resultando em “subcanais virtuais”, amostrados à taxa de símbolos, caracterizando um sistema SIMO. A Figura 1.3 ilustra o efeito da sobreamostragem do sinal recebido.

Conforme será verificado a seguir, o ruído em cada um deste subcanais é branco, porém, as amostras de ruído dos diversos subcanais, num mesmo instante de tempo, são correlacionadas.

No sistema de comunicação ilustrado na Figura 1.2,  $s(t)$  é um trem de impulsos modulado, da forma

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta(t - kT), \quad (1.1)$$

em que  $s_k$  é a sequência de símbolos transmitidos e  $T$  é a taxa de símbolos. O formato dos pulsos transmitidos é definido pelo filtro  $p(t)$ , que normalmente é forma raiz de cosseno levantado [2],  $c(t)$  é a resposta ao impulso do canal,  $n(t)$  é o ruído aditivo, suposto branco, Gaussiano de média nula e variância  $\sigma^2$ , e  $y(t)$  é o sinal recebido, modelado como

$$y(t) = s(t) * h(t) + v(t), \quad (1.2)$$

em que

$$h(t) = p(t) * c(t) * p(-t), \quad (1.3)$$

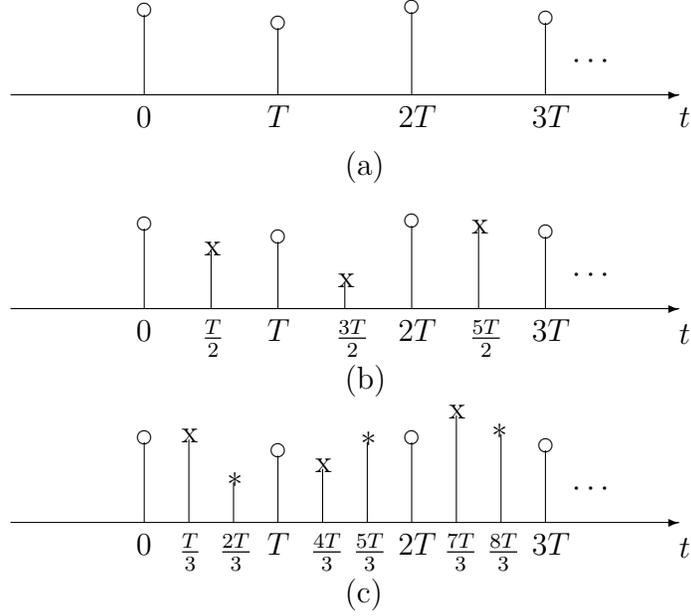


Figura 1.3: Efeito da sobreamostragem do sinal recebido. (a) Amostrando-se à taxa de símbolos  $T$ . (b) Amostrando-se a duas vezes a taxa de símbolos  $T$ , surgem 2 subcanais virtuais. As amostras de cada subcanal são diferenciadas por  $\circ$  e  $\times$ . (c) Amostrando-se a três vezes a taxa de símbolos  $T$ , surgem 3 subcanais virtuais. As amostras de cada subcanal são diferenciadas por  $\circ$ ,  $\times$  e  $*$ .

e

$$v(t) = n(t) * p(-t). \quad (1.4)$$

Por fim,  $y_k^{(r)}$  é a  $r$ -ésima fase do sinal sobreamostrado, definido como

$$y_k^{(r)} \triangleq y\left(kT + \frac{r}{R}T\right), \quad (1.5)$$

em que  $R \in \mathbb{N}$  indica o fator de sobreamostragem e  $r$  é um inteiro tal que

$$0 \leq r < R.$$

Das Equações (1.1), (1.2) e (1.5), segue que o sinal sobreamostrado pode ser escrito como

$$y_k^{(r)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} s_l h\left((k-l)T + \frac{r}{R}T\right) + v\left(kT + \frac{r}{R}T\right). \quad (1.6)$$

Observe que o sinal de saída  $y_k^{(r)}$ ,  $0 \leq r < R$ , define um canal seletivo em frequência SIMO.

Pelas definições

$$h_k^{(r)} \triangleq h\left(kT + \frac{r}{R}T\right), \quad (1.7)$$

e

$$v_k^{(r)} \triangleq v\left(kT + \frac{r}{R}T\right), \quad (1.8)$$

segue que a Equação (1.6) pode ser reescrita como

$$y_k^{(r)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} s_l h_{k-l}^{(r)} + v_k^{(r)}. \quad (1.9)$$

Se o pulso  $\mathcal{P}(t) \triangleq p(t) * p(-t)$  satisfizer o critério de Nyquist,  $S_V(f)$ , a densidade espectral de potência de  $v(t)$  é da forma  $\sigma^2 |P(f)|^2$ , em que  $P(f) \triangleq \mathcal{F}\{p(t)\}$  possui simetria vestigial [2]. Como consequência, a sequência  $v_k^{(r)}$  terá espectro plano (Figura 1.4), pois

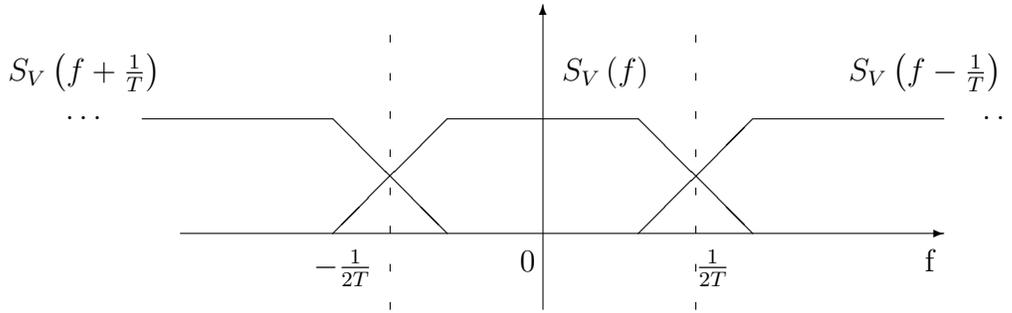


Figura 1.4: Densidade espectral do ruído na saída do amostrador.

$$S_V(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S_V\left(f - \frac{m}{T}\right). \quad (1.10)$$

Assim, conclui-se que  $v_k^{(r)}$  é um ruído branco. Ocorre, porém, que  $v_k^{(u)}$  e  $v_k^{(v)}$ ,  $u \neq v$ , são correlacionadas, pois

$$\begin{aligned} E\left[v_k^{(u)} v_k^{(v)}\right] &= E\left[v\left(kT + \frac{u}{R}T\right) v\left(kT + \frac{v}{R}T\right)\right] \\ &= R_V\left(kT + \frac{u}{R}T, kT + \frac{v}{R}T\right) \\ &= \frac{\eta}{2} \mathcal{P}\left(\frac{u-v}{R}T\right) \\ &\triangleq [\Xi]_{uv}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

em que  $\eta$  é a densidade espectral de potência do ruído branco e  $[\Xi]_{uv}$  indica o elemento  $(u, v)$  da matriz (de covariância)  $\Xi$ .

Observe que mesmo que  $\mathcal{P}(\tau)$  satisfaça o critério de Nyquist, esta função só é nula se  $\tau = kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Disto conclui-se que  $v_k^{(u)}$  e  $v_k^{(v)}$  são correlacionadas.

### 1.1.1 Receptor MAP

A estimativa MAP (Máximo *A Posteriori*) dos bits transmitidos,  $\hat{b}_k$ , é definida como

$$\hat{b}_k = \arg \max_{b_k} \{p(b_k | y_{0:k+\Delta})\}. \quad (1.12)$$

Em sistemas de comunicação digitais lineares sobre canais seletivos em frequência com parâmetros conhecidos - ou que possam ser estimados com precisão-, a estimativa MAP dos bits, que minimiza a taxa média de erro de bit [11] dado um bloco de sinal (i.e.,  $\Delta > 0$  na Equação (1.12)) pode ser determinada através do algoritmo BCJR [12]. Caso  $\Delta = 0$ , a solução MAP é dada pelo *Grid Filter*, descrito na Seção 2.1.

Caso os parâmetros do canal sejam desconhecidos *a priori*, a estimativa MAP dos bits não pode ser calculada de forma exata; soluções aproximadas para este problema, conhecido como equalização cega [3] ou semi-cega (caso trechos do sinal transmitido sejam conhecidos), podem ser obtidas através de diversos métodos. Dentre estes, destacam-se os métodos que aproximam diretamente a distribuição *a posteriori* dos bits (a partir da qual pode ser obtida a estimativa MAP) por distribuições empíricas [5], tais como os métodos baseados em amostragem MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) [13] e Filtros de Partículas [1, 6, 7], sendo estes o foco deste trabalho.

# Capítulo 2

## Técnicas Clássicas de Equalização

Neste capítulo, descrevem-se técnicas clássicas de equalização, que posteriormente serão utilizadas para quantificar o desempenho dos métodos cegos analisados neste trabalho. O estimador MAP utilizando *Grid Filter*, descrito na Seção 2.1, é de particular interesse por atingir a mínima taxa média de erro de bit (BER) na situação em que os parâmetros do canal são exatamente conhecidos. O equalizador MMSE linear treinado (Seção 2.2) que implementa a solução de Wiener [8], por sua vez, não atinge a mínima BER possível, mas é o limitante superior de desempenho de todas as técnicas baseadas em filtragem linear, como por exemplo, os algoritmos RLS, LMS e CMA [8].

### 2.1 Estimativa MAP treinada via *Grid Filter*

Nesta seção, por se tratar de um problema de equalização treinada, supõe-se que a resposta ao impulso do canal é conhecida e, portanto, o condicionamento nesta grandeza é omitido. Considerando o modelo de canal SIMO definido na Equação 1.9, representado matricialmente como

$$y_n = X_n^T H_n + v_n, \quad (2.1)$$

em que  $y_n \triangleq \left[ y_n^{(0)} \dots y_n^{(R-1)} \right]^T$  denota o sinal recebido no instante  $n$ ,  $H_n \triangleq \left[ h_0^{(0)} \dots h_{L-1}^{(0)} \dots h_0^{(R-1)} \dots h_{L-1}^{(R-1)} \right]^T$  reúne os termos das respostas ao impulso dos  $R$  subcanais,  $v_n \triangleq \left[ v_n^{(0)} \dots v_n^{(R-1)} \right]^T$  representa a contribuição do ruído aditivo, modelado como um vetor aleatório Gaussiano com média zero e matriz de covariância  $\Xi$  (Equação 1.11),

$X_n$  é uma matriz  $RL \times R$  da forma

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

e  $x_n \triangleq [s_n \ s_{n-1} \ \cdots \ s_{n-L+1}]^T$  é um vetor com os últimos  $L$  símbolos transmitidos.

O *Grid Filter* determina exatamente, de forma recursiva, a estimativa MAP dos bits  $b_n$ , dada por

$$\hat{b}_n = \arg \max_{b_n} \{p(b_n|y_{0:n})\}, \quad (2.3)$$

cuja f.m.p. pode ser calculada marginalizando-se a f.m.p. dos estados do canal, i.e.,

$$p(b_n|y_{0:n}) = \sum_{x_n | b_n = s_n s_{n-1}} p(x_n|y_{0:n}), \quad (2.4)$$

onde foi suposto que se está utilizando modulação diferencial - i.e.,  $b_n = s_n s_{n-1}$ .

Para se obter  $p(x_n|y_{0:n})$ , observe que, dado  $p(x_{n-1}|y_{0:n-1})$ , pode-se escrever

$$p(x_n, x_{n-1}|y_{0:n-1}) = p(x_n|x_{n-1}, y_{0:n-1})p(x_{n-1}|y_{0:n-1}). \quad (2.5)$$

Mas, num sistema DBPSK,

$$p(x_n|x_{n-1}, y_{0:n-1}) = p(x_n|x_{n-1}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } s_n = 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } s_n = -1 \end{cases}, \quad (2.6)$$

para as transições de estado possíveis (i.e., as que respeitam a definição de  $x_n$ ). Consequentemente,

$$p(x_n|y_{0:n-1}) = \sum_{x_{n-1}} p(x_n, x_{n-1}|y_{0:n-1}) = \sum_{x_{n-1}} p(x_n|x_{n-1})p(x_{n-1}|y_{0:n-1}). \quad (2.7)$$

A Equação (2.7) define o chamado *Passo de Predição* do Filtro de Grelha. Note agora que,

$$p(y_n|x_n, y_{0:n-1})p(x_n|y_{0:n-1}) = p(y_n, x_n|y_{0:n-1}), \quad (2.8)$$

onde, a *verossimilhança*  $p(y_n|x_n, y_{0:n-1}) = p(y_n|x_n)$  é dada por

$$p(y_n|x_n) = \mathcal{N}(y_n|X_n^T H_n; \Xi). \quad (2.9)$$

Observe agora que

$$p(x_n|y_{0:n}) = \frac{p(y_n, x_n|y_{0:n-1})}{p(y_n|y_{0:n-1})} = \frac{p(y_n, x_n|y_{0:n-1})}{\sum_{x_n} p(y_n, x_n, y_{0:n-1})},$$

donde

$$p(x_n|y_{0:n}) = \frac{p(y_n|x_n, y_{0:n-1})p(x_n|y_{0:n-1})}{\sum_{x_n} p(y_n|x_n)p(x_n|y_{0:n-1})}. \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) define o *Passo de Filtragem* do Filtro de Grelha. Iterando-se as equações (2.10) e (2.7), é possível atualizar  $p(x_n|y_{0:n})$  a cada instante  $n$  de modo a incorporar as observações  $y_n$ . A estimativa MAP dos bits pode então ser obtida pela Equação (2.3).

## 2.2 Equalizador MMSE Linear

Seja  $\underline{y}_n \triangleq [y_n^{(0)} \cdots y_{n-M+1}^{(0)} y_n^{(1)} \cdots y_{n-M+1}^{(1)} \cdots y_n^{(R-1)} \cdots y_{n-M+1}^{(R-1)}]^T$  a coleção do sinal recebido nos últimos  $M$  instantes através de cada um dos  $R$  subcanais. De acordo com o modelo de sinal dado pela Equação (1.9),  $\underline{y}_n$  pode ser expresso como

$$\underline{y}_n = \mathcal{H}_M \underline{s}_n + \underline{v}_n, \quad (2.11)$$

em que

$$\mathcal{H}_M = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_M^{(0)} \\ \mathcal{H}_M^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_M^{(R-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{H}_M^{(r)} = \begin{bmatrix} h_0^{(r)} & h_1^{(r)} & \cdots & h_L^{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_0^{(r)} & h_1^{(r)} & \cdots & h_L^{(r)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & h_0^{(r)} & \cdots & h_L^{(r)} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\underline{s}_n = \begin{bmatrix} s_n \\ \vdots \\ s_{n-M+1} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\underline{v}_n = \left[ v_n^{(0)} \cdots v_{n-M+1}^{(0)} \quad v_n^{(1)} \cdots v_{n-M+1}^{(1)} \quad \cdots \quad v_n^{(R-1)} \cdots v_{n-M+1}^{(R-1)} \right]^T. \quad (2.15)$$

Deseja-se obter a partir de  $\underline{y}_n$  uma estimativa do sinal transmitido  $s_{n-i}$ ,  $0 \leq i \leq L + M - 1$ , ótima no sentido de mínimos quadrados médios [8], como

$$\hat{s}_{n-i}^{MMSE} = \underline{g}_i^{MMSE} \underline{y}_n, \quad (2.16)$$

em que

$$\underline{g}_i^{MMSE} = E \left[ s_{n-i} \underline{y}_n^T \right] E \left[ \underline{y}_n \underline{y}_n^T \right]^{-1}. \quad (2.17)$$

Pode-se mostrar que [8]

$$E \left[ s_{n-i} \underline{y}_n^T \right] = [\mathcal{H}_M]_{i+1}^T, \quad (2.18)$$

em que  $[\mathcal{H}_M]_{i+1}$  denota a  $i$ -ésima coluna da matriz  $\mathcal{H}_M$ , pois  $s_n$  é i.i.d., independente de  $v_n$  e  $E[|s_n|^2] = 1$ . Pelas mesmas razões,

$$E \left[ \underline{y}_n \underline{y}_n^T \right] = E \left[ \mathcal{H}_M \underline{s}_n \underline{s}_n^T \mathcal{H}_M + \underline{v}_n \underline{v}_n^T \right] = \mathcal{H}_M \mathcal{H}_M^T + \Xi \otimes I_M, \quad (2.19)$$

onde  $\otimes$  denota o produto de Kronecker e  $\Xi$  é a matriz de covariância do ruído, definida na Equação (1.11).

Utilizando-se as Equações (2.19) e (2.18) na Equação (2.17) e, em seguida, substituindo-se o resultado obtido na Equação (2.16), segue que

$$\hat{s}_{n-i}^{MMSE} = [\mathcal{H}_M]_{i+1}^T (\mathcal{H}_M \mathcal{H}_M^T + \Xi \otimes I_M)^{-1} \underline{y}_n. \quad (2.20)$$

Note que, em geral,  $\hat{s}_{n-i}^{MMSE} \neq \pm 1$ . Assim, é necessária a aplicação de um detector de limiar para se obter uma estimativa dos símbolos. Os bits transmitidos, então, podem ser estimados como  $\hat{b}_{n-i}^{MMSE} = \hat{s}_{n-i}^{MMSE} \hat{s}_{n-i-1}^{MMSE}$ , devido a modulação diferencial.

# Capítulo 3

## Filtros de Partículas

Os métodos de Monte Carlo Sequenciais (*Sequential Monte Carlo* - SMC), também conhecidos como *Filtros de Partículas*, são técnicas, hoje bastante conhecidas e sólidas, de algoritmos para se aproximar a solução de problemas de filtragem estocástica [7]. Seja  $x_{0:n}$  a sequência de *variáveis de estado* que se deseja estimar a partir das *observações*<sup>1</sup>  $y_{0:n}$ . O Método de Monte Carlo Sequencial aproxima a distribuição *a posteriori*  $p(x_{0:n}|y_{0:n})$ , necessária para o cálculo de estimativas MAP, por um enxame de pontos, chamados de *partículas*. As partículas evoluem no tempo de acordo com certas regras de simulação, podendo se propagar ou desaparecer de acordo com sua capacidade em representar certos pedaços do espaço amostral [1, 7]. A seguir, é fornecido um esquema geral de um filtro de partículas, baseado em [7]. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em [14] e suas referências.

A estimativa da distribuição de probabilidade *a posteriori* se dá através da aproximação *empírica* [7]

$$p(x_{0:n}|y_{0:n}) \approx \frac{\sum_{p=0}^{P-1} w_n^{(p)} \delta(x_{0:n}^{(p)} - x_{0:n})}{\sum_{k=0}^{P-1} w_n^{(k)}}, \quad (3.1)$$

em que  $P \gg 1$  é o número de partículas,  $\delta(\cdot)$  é a função Delta de Dirac,  $x_{0:n}^{(p)}$  são as partículas, amostras de uma f.m.p. conhecida como *função de importância*  $\pi(x_{0:n}|y_{0:n})$ , e  $w_n^{(p)}$ , o peso de cada partícula, é dado por [7]

$$w_n^{(p)} \triangleq \frac{p(x_{0:n}^{(p)}|y_{0:n})}{\pi(x_{0:n}^{(p)}|y_{0:n})}. \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Em geral,  $x_n$  e  $y_n$  podem ser vetores com dimensões arbitrárias.

Definindo-se a função de importância como [7]

$$\pi(x_{0:n}|y_{0:n}) \triangleq \pi(x_n|x_{0:n-1}, y_{0:n})\pi(x_{0:n-1}|y_{0:n-1}), \quad (3.3)$$

as amostras de  $\pi(x_{0:n}|y_{0:n})$  podem ser obtidas *recursivamente* como [7]

$$x_n^{(p)} \sim \pi(x_n|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n}), \quad (3.4)$$

e os pesos atualizados de acordo com [7]

$$w_n^{(p)} \propto w_{n-1}^{(p)} \frac{p(x_n^{(p)}, y_n|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1})}{\pi(x_n^{(p)}|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1})}. \quad (3.5)$$

Comumente, os pesos definidos por (3.5) são normalizados [7] a cada interação de modo que tenham soma unitária. Por simplicidade, é possível utilizar a própria f.m.p. de transição de estados como função de importância, i.e.,

$$\pi(x_n^{(p)}|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1}) \triangleq p(x_n^{(p)}|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1}), \quad (3.6)$$

sendo os pesos agora atualizados como

$$w_n^{(p)} \propto w_{n-1}^{(p)} p(y_n|x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1}), \quad (3.7)$$

pois  $p(x_n^{(p)}, y_n|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1}) = p(y_n|x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1})p(x_n^{(p)}|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1})$ .

Pode-se verificar [5] que, em geral, após algumas iterações do algoritmo, um dos pesos normalizados tende a 1 enquanto os outros tendem a se anular, num fenômeno conhecido como *degeneração* da amostra. Para se mitigar este problema, pode-se utilizar uma função de importância que minimize a variância dos pesos, o que nem sempre é praticável. Uma solução mais usual é realizar uma etapa de seleção, que descarta partículas com baixo peso associado e replica as partículas com peso normalizado alto, num processo conhecido como *reamostragem* [1].

Num passo de reamostragem, é gerado um vetor  $i^{(p)}$  que contém os índices das partículas sobreviventes através de um processo aleatório. Há diversos algoritmos de reamostragem; o mais simples deles, conhecido como algoritmo multinomial [14], determina os índices amostrando, independentemente e com reposição, de f.m.p. definida de forma que  $\mathbb{P}\{i^{(p)} = q\} = w_n^{(q)}$ ,  $1 \leq p, q \leq P$ . Vale ressaltar que nem sempre é benéfico se reamostrar um conjunto de partículas, pois pode ocorrer de o conjunto

de partículas resultante ter pouca diversidade, fenômeno que é conhecido como *empobrecimento amostral*. Em [15], definiu-se o *tamanho efetivo* de uma amostra como

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{p=1}^P (w_n^{(p)})^2}. \quad (3.8)$$

Pode-se mostrar que o tamanho efetivo da amostra é igual ao número de partículas caso os pesos  $w_n^{(p)}$  sejam iguais [13] e diminui, tendendo a 1, caso a distribuição dos pesos seja desigual. Costumeiramente, um passo de reamostragem é realizado sempre que  $N_{eff}$  cair abaixo de um limiar arbitrário [1].

### 3.1 Equalização Cega de um Canal SISO utilizando Filtro de Partículas Rao-Blackwellizado

Nesta seção, descreve-se um algoritmo para equalização cega de um canal SISO utilizando um filtro de partículas Rao-Blackwellizado, tal como o proposto pioneiramente em [15]. O termo Rao-Blackwellizado é utilizado para descrever técnicas de estimação em que a distribuição *a posteriori* das grandezas estimadas é determinada através da *marginalização* de uma distribuição conjunta, que originalmente poderia envolver outras grandezas que não se desejam estimar explicitamente. Pode-se mostrar que este processo reduz a variância das estimativas das variáveis de interesse [5].

O problema de equalização cega de um canal SISO pode ser descrito como um problema de filtragem estocástica [5], no qual se deseja estimar  $x_n$  dadas as observações  $y_{0:n}$  definidas de acordo com o seguinte modelo de *espaço de estados*

$$x_n = Ax_{n-1} + [s_n \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (3.9)$$

$$H_n = F_n H_{n-1} + u_n \quad (3.10)$$

$$y_n = x_n^T H_n + v_n \quad (3.11)$$

em que  $A$  é uma matriz nula exceto na primeira subdiagonal inferior, onde seus elementos são unitários,  $H_n$  é definido como na Seção 2.1 com  $R = 1$ ,  $F_n$  é uma matriz supostamente conhecida,  $u_n$  é um vetor aleatório Gaussiano com média nula e matriz de covariância  $Q_n$  e  $v_n$  é um processo aleatório Gaussiano branco de média nula e variância  $\sigma^2$ . Caso o canal seja estático, tem-se  $F_n = I$  e  $Q_n = \mathbf{0}$ . Observe que  $y_n$  é uma função não-linear do vetor de estados estendido  $[x_n^T \ H_n^T]^T$ . O modelo

de observação definido pela Equação (3.11) é sujeito a ambiguidade de fase, pois  $y_n$  é inalterado se  $x_n = -x_n$  e  $H_n = -H_n$ . Para contornar esta questão, é necessário o emprego de modulação diferencial ou de uma sequência de treinamento.

Caso  $H_n$  seja conhecido, a solução exata do problema é dada pelo Filtro de Grelha, descrito na Seção 2.1. Caso  $H_n$  seja desconhecido, é possível projetar um filtro de partículas para estimar  $[x_n^T \ H_n^T]^T$  explicitamente, o que geralmente não leva a bons resultados [13]. O filtro de partículas Rao-Blackwellizado, por outro lado, não estima explicitamente  $H_n$ , tratando esta variável como um *nuisance parameter* [13], o que é possível pois a f.d.p. necessária para o cálculo dos pesos de um filtro de partículas projetado para estimar  $x_n$  (Equação 3.7) pode ser calculada como

$$p(y_n|x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1}) = \int_{\mathbb{R}^L} p(y_n|x_n^{(p)}, H_n)p(H_n|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1}) dH_n, \quad (3.12)$$

$$= \mathcal{N}(y_n|(x_n^{(p)})^T H_{n|n-1}^{(p)}; \sigma^2 + (x_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)} x_n^{(p)}) \quad (3.13)$$

pois  $p(y_n|x_n^{(p)}, H_n) = \mathcal{N}(y_n|(x_n^{(p)})^T H_n; \sigma^2)$  e, sob a hipótese de que  $H_0$  tem f.d.p. *a priori* Gaussiana,  $p(H_n|x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1}) = \mathcal{N}(H_n|\bar{H}_{n|n-1}^{(p)}; \Sigma_{n|n-1}^{(p)})$ , podendo o vetor de médias *a posteriori*  $\bar{H}_{n|n-1}^{(p)}$  e a matriz de covariância  $\Sigma_{n|n-1}^{(p)}$  serem estimados recursivamente através de um Filtro de Kalman devidamente projetado<sup>2</sup> [7] pois, dada a sequência de estados  $x_{0:n}^{(p)}$ , a densidade a posteriori do vetor de parâmetros do canal no instante  $n$ , i.e.,  $p(H_n|x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n})$  é Gaussiana. Vale destacar que, caso o canal seja invariante no tempo, i.e.  $F_n = I$  e  $Q_n = \mathbf{0}$ , o Passo de Predição do Filtro de Kalman acaba não fazendo nada. O pseudocódigo do algoritmo resultante é listado na Tabela 3.1.

---

<sup>2</sup>O cálculo detalhado das f.d.p.s presentes na Equação (3.12) é apresentado no Apêndice. Observe que para se reduzir o caso SIMO ao caso SISO, basta fazer  $R = 1$  e  $\Xi = \sigma^2$ .

Inicialização do Algoritmo ( $n = 0, p = 1 : P$ )

- $x_0^{(p)} \sim \pi(x_0) = p(x_0)$
- $w_0^{(p)} = \frac{1}{P}$  ( $P$  é o número de partículas)
- $H_0 \sim p(H_0) = \mathcal{N}(H_0 | \bar{H}_0; \Sigma_0)$

Para  $n > 0, p = 1 : P$ ,

• Filtro de Kalman: Passo de Predição

- $\bar{H}_{n|n-1}^{(p)} = F_n \bar{H}_{n-1}^{(p)}$
- $\Sigma_{n|n-1}^{(p)} = Q_n + F_n \Sigma_{n-1}^{(p)} F_n^T$

• Filtro de Partículas: Amostragem e Atualização dos Pesos

- $x_n^{(p)} \sim p(x_n | x_{n-1}^{(p)})$
- $w_n^{(p)} \propto w_{n-1}^{(p)} p(y_n | x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1})$   
 $= w_{n-1}^{(p)} \mathcal{N}(y_n | (x_n^{(p)})^T \bar{H}_{n|n-1}^{(p)}; \sigma^2 + (x_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)} x_n^{(p)})$ .

• Filtro de Kalman: Passo de Filtragem

- $\gamma_n^{(p)} \triangleq (x_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)} x_n^{(p)} + \sigma^2$
- $e_n^{(p)} \triangleq y_n - (x_n^{(p)})^T \bar{H}_{n|n-1}^{(p)}$
- $\bar{H}_n^{(p)} = \bar{H}_{n|n-1}^{(p)} + (\gamma_n^{(p)})^{-1} \Sigma_{n|n-1}^{(p)} x_n^{(p)} e_n^{(p)}$
- $\Sigma_n^{(p)} = \Sigma_{n|n-1}^{(p)} - (\gamma_n^{(p)})^{-1} \Sigma_{n|n-1}^{(p)} x_n^{(p)} (x_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)}$

• Reamostragem

Determine  $i(p)$ ,  $1 \leq p \leq P$ , a partir de  $w_n^{(p)}$  utilizando algum algoritmo de reamostragem. Então, faça

- $x_n^{(p)} = x_n^{(i(p))}$
- $\bar{H}_n^{(p)} = \bar{H}_n^{(i(p))}$
- $\Sigma_n^{(p)} = \Sigma_n^{(i(p))}$
- $w_n^{(p)} = 1/P$

Tabela 3.1: Pseudocódigo do algoritmo para equalização cega de canais SISO.

## Cálculo da Estimativa MAP

A estimativa MAP dos bits  $b_n$  é determinada por

$$\hat{b}_n = \arg \max_{b_n} \{\hat{p}(b_n|y_{0:n})\} \quad (3.14)$$

em que a f.m.p.  $\hat{p}(b_n|y_{0:n})$ , obtida marginalizando-se a Equação (3.1), é dada por

$$\hat{p}(b_n|y_{0:n}) \triangleq \sum_{p=0}^{P-1} w_n^{(p)} \delta(b_n - b_n^{(p)}), \quad (3.15)$$

em que supõe-se que um esquema diferencial seja utilizado, ou seja  $b_n^{(p)} \triangleq s_n^{(p)} s_{n-1}^{(p)}$ , onde  $s_n^{(p)}$  e  $s_{n-1}^{(p)}$ , são, respectivamente, o primeiro e o segundo elementos do vetor  $x_n^{(p)}$ .

# Capítulo 4

## Equalização Cega de Sistemas SIMO Sob Ruído Correlacionado

Neste capítulo, desenvolve-se um algoritmo de equalização cega de canais SIMO sob ruído correlacionado utilizando um filtro de partículas. O algoritmo aqui descrito difere do apresentado na Seção 3.1 pelo fato de as observações  $y_n$  serem vetores de dimensão  $R > 1$ , tal como o suposto na Seção 2.1.

Como o descrito na Seção 3.1, a operação de um filtro de partículas Rao-Blackwellizado utilizando como função de importância a função de transição de estados se reduz ao cálculo dos pesos através da Equação (3.7). Para isto, deve-se calcular a f.d.p.

$$p(y_n | x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{RL}} p(y_n | X_n^{(p)}, H_n) p(H_n | x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1}) dH_n, \quad (4.1)$$

em que  $H_n$  é uma matriz coluna  $RL \times 1$  que coleciona os termos das respostas ao impulso dos  $R$  subcanais, definida na Seção 2.1.

Para determinar (4.1), observe inicialmente que, em decorrência do modelo definido pela Equação (2.1),

$$p(y_n | X_n^{(p)}, H_n) = \mathcal{N}(y_n | (X_n^{(p)})^T H_n; \Xi), \quad (4.2)$$

em que  $y_n$  é uma matriz coluna  $R \times 1$  que contém as observações em cada subcanal no instante  $n$ ,  $X_n^{(p)}$  é uma matriz  $RL \times R$  definida na Equação (2.2) (substituindo  $x_n$  por  $x_n^{(p)}$ ) e  $\Xi$  é a matriz de covariância do ruído, dada na Equação (1.11).

Pode-se mostrar por indução que se a f.d.p. *a priori*  $p(H_0)$  for Gaussiana, então  $p(H_n | x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1})$  é uma f.d.p. Gaussiana para todo  $n > 0$  (vide Apêndice). Explo-

rando este fato, pode-se mostrar que, como consequência da Equação (A.12),

$$\begin{aligned}
p(y_n | x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1}) &= \int_{\mathbb{R}^{RL}} p(y_n | X_n^{(p)}, H_n) p(H_n | x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1}) dH_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{RL}} \mathcal{N}(y_n | (X_n^{(p)})^T H_n; \Xi) \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_{n|n-1}^{(p)}; \Sigma_{n|n-1}^{(p)}) dH_n \quad (4.3) \\
&= \mathcal{N}(y_n | (X_n^{(p)})^T \bar{H}_{n|n-1}^{(p)}; \Xi + (X_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)} X_n^{(p)}).
\end{aligned}$$

em que  $\bar{H}_{n|n-1}^{(p)}$  representa a média e  $\Sigma_{n|n-1}^{(p)}$  a matriz de covariância associadas a f.d.p.  $p(H_n | x_{0:n-1}^{(p)}, y_{0:n-1})$ . Para se determinar estes parâmetros, observe que, dado  $x_n^{(p)}$  (e, conseqüentemente,  $X_n^{(p)}$ ), o vetor  $H_n$  é relacionado à observação  $y_n$  por um modelo linear sujeito a observações Gaussianas, pois

$$H_n = F_n H_{n-1} + u_n \quad (4.4)$$

$$y_n = (X_n^{(p)})^T H_n + v_n \quad (4.5)$$

em que  $u_n \sim \mathcal{N}(0; Q_n)$ ,  $v_n \sim \mathcal{N}(0; \Xi)$  e  $F_n$  e  $X_n^{(p)}$  são matrizes supostamente conhecidas.

Para o modelo dado pelas Equações (4.4) e (4.5), é possível determinar  $\bar{H}_{n|n-1}^{(p)}$  e  $\Sigma_{n|n-1}^{(p)}$  exata e recursivamente (vide Apêndice) através de um Filtro de Kalman [8], cujas equações são listadas a seguir.

- Passo de Predição

$$\bar{H}_{n|n-1}^{(p)} = F_n \bar{H}_{n-1}^{(p)} \quad (4.6)$$

$$\Sigma_{n|n-1}^{(p)} = Q_n + F_n \Sigma_{n-1}^{(p)} F_n^T \quad (4.7)$$

- Passo de Filtragem

$$\bar{H}_n^{(p)} = \bar{H}_{n|n-1}^{(p)} + \Sigma_{n|n-1}^{(p)} X_n^{(p)} [(X_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)} X_n^{(p)} + \Xi]^{-1} [y_n - (X_n^{(p)})^T \bar{H}_{n|n-1}^{(p)}] \quad (4.8)$$

$$\Sigma_n^{(p)} = \Sigma_{n|n-1}^{(p)} - \Sigma_{n|n-1}^{(p)} X_n^{(p)} [(X_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)} X_n^{(p)} + \Xi]^{-1} (X_n^{(p)})^T \Sigma_{n|n-1}^{(p)} \quad (4.9)$$

Note que, diferentemente do caso SISO, o Filtro de Kalman projetado para o canal SIMO requer a inversão de uma matriz de tamanho  $RL$ , o que incorre numa complexidade computacional  $\mathcal{O}(R^3 L^3)$  para cada partícula. O pseudocódigo do algoritmo proposto é apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Pseudocódigo do algoritmo para equalização cega de canais SIMO proposto.

<p><b>para</b> <math>n = 0</math> <b>faça</b></p> <p>    <b>para</b> <math>p = 1 : P</math> <b>faça</b></p> <p>        • <math>w_n^{(p)} = 1/P</math></p> <p>        • <math>x_n^{(p)} \sim p(x_n)</math></p> <p>        • <math>\bar{H}_n^{(p)} = \mathbf{0}</math></p> <p>        • <math>\Sigma_n^{(p)} = \mathbf{I}</math></p> <p>    <b>fim para</b></p> <p><b>fim para</b></p> <p><b>para</b> <math>n &gt; 0</math> <b>faça</b></p> <p>    <b>para</b> <math>p = 1 : P</math> <b>faça</b></p> <p>        • Gere <math>x_n^{(p)} \sim p(x_n   x_{n-1}^{(p)})</math>.</p> <p>        • Calcule <math>p(y_n   x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1})</math> com (4.3).</p> <p>        • Atualize os pesos fazendo <math>w_n^{(p)} \propto w_{n-1}^{(p)} p(y_n   x_{0:n}^{(p)}, y_{0:n-1})</math>.</p> <p>    <b>fim para</b></p> <p>        • Normalize os pesos, i.e., <math>\sum_{p=1}^P w_n^{(p)} = 1</math>.</p> <p>        • Determine <math>\hat{b}_n</math> através de (3.14).</p> <p>        • Reamostre o conjunto de partículas.</p> <p><b>fim para</b></p>
---

# Capítulo 5

## Simulações Computacionais

Foram realizadas simulações de um sistema DBPSK implementado com o filtro de partículas descrito nas Seções 3.1 e 4, utilizando-se 300 partículas. O modelo considerado possuía 6 subcanais de ordem 3. Os parâmetros dos canais foram obtidos amostrando-se, independentemente, para cada subcanal e realização, de uma f.d.p. Gaussiana  $\mathcal{N}(\mathbf{0}; I)$  e normalizando-se o resultado. A matriz de covariância  $\Xi$  foi tomada igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \sigma^2,$$

sendo  $\sigma^2$  determinado de forma a resultar na relação sinal-ruído desejada. Para efeitos de comparação, também foram feitas simulações para equalização usando o *Grid Filter* e o Equalizador MMSE.

O desempenho de cada um dos três métodos de equalização foi testado para os cenários: i) ruído correlacionado com demodulação projetada para ruído correlacionado, ii) ruído correlacionado com demodulação projetada para ruído branco, iii) ruído branco com demodulação projetada para ruído correlacionado e iv) ruído branco com demodulação projetada para ruído branco. Para cada um desses cenários foram simuladas 600 realizações independentes nas quais 250 bits eram transmitidos, sendo os primeiros 100 descartados para aguardar a convergência dos algoritmos. Estas simulações levaram cerca de 48 horas num PC com processador Intel Core i5-320M 2.60GHz e foram realizadas com dados sintéticos em MATLAB<sup>®</sup>.

A Figura 5.1 mostra a taxa média de erros de bit em função da relação sinal-ruído obtida para o *Grid Filter* para os cenários considerados. Como se pode observar, nos dois cenários em que há desajuste entre o modelo de sinal real e o adotado no projeto do algoritmo de equalização, há uma degradação de desempenho. Além disso, o cenário sob ruído correlacionado com equalizador devidamente projetado exibiu um desempenho marcadamente superior aos demais.

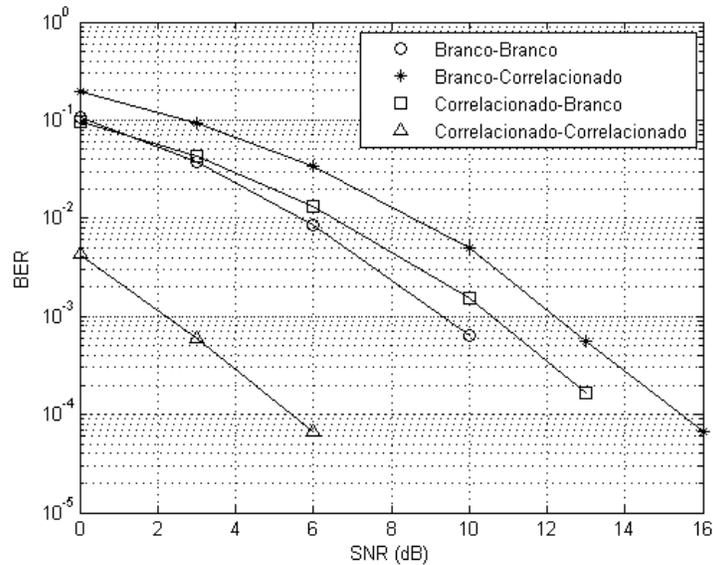


Figura 5.1: Taxa média de erro de bit (BER) em função da relação sinal-ruído obtida para o *Grid Filter* sob os cenários descritos no texto. A legenda indica, em ordem, o modelo de ruído real e o suposto pelo receptor.

A Figura 5.2, por sua vez, ilustra os resultados obtidos sob as mesmas condições para o equalizador linear MMSE com 15 *taps* que calcula a solução de Wiener analiticamente [8]. Como pode ser visto, o comportamento qualitativo para os diversos cenários se manteve, com melhor desempenho para os casos em que o modelo correto é adotado pelo receptor.

Na Figura 5.3 são mostrados os resultados obtidos para o algoritmo cego baseado em filtros de partículas descrito no Capítulo 4. Como se pode notar, o desempenho observado segue as mesmas tendências dos métodos treinados, tendendo porém a um patamar para os cenários com desajuste de modelo para relações sinal-ruído superiores a 10-15dB.

O desempenho dos três algoritmos considerados (*Grid Filter*, MMSE, baseado em filtro de partículas) sob ruído correlacionado e utilizando o modelo correto no receptor

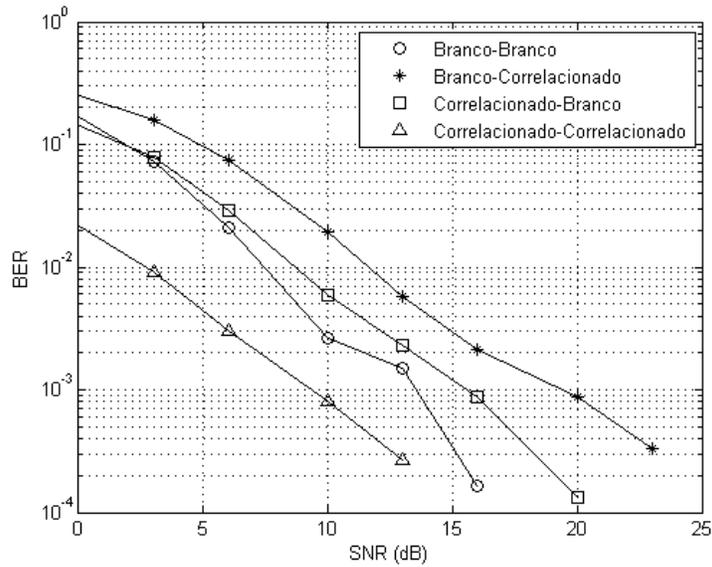


Figura 5.2: Taxa média de erro de bit (BER) em função da relação sinal-ruído obtida para o Equalizador MMSE sob os cenários descritos no texto. A legenda indica, em ordem, o modelo de ruído real e o suposto pelo receptor.

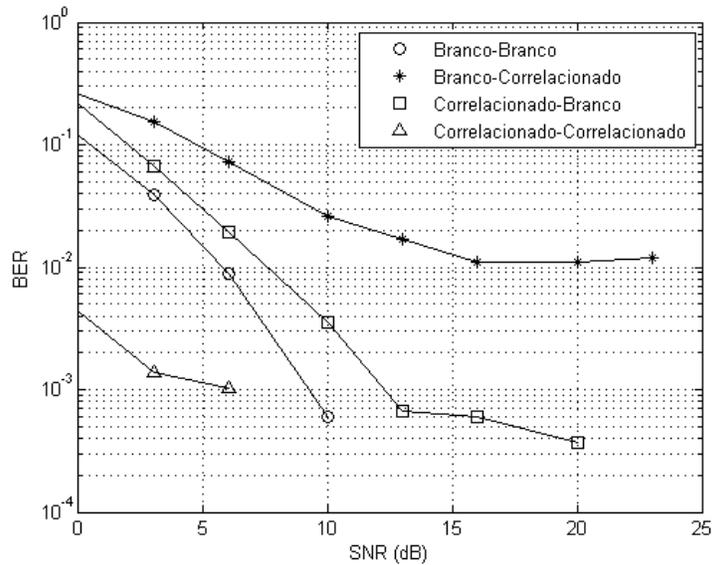


Figura 5.3: Taxa média de erro de bit (BER) em função da relação sinal-ruído obtida para o equalizador cego baseado em filtro de partículas sob os cenários descritos no texto. A legenda indica, em ordem, o modelo de ruído real e o suposto pelo receptor.

é mostrado na Figura 5.4. Conforme o esperado, o *Grid Filter*, que calcula exatamente a solução MAP, exibiu um desempenho superior ao dos demais métodos. O algoritmo

baseado em filtro de partículas, por sua vez, teve um desempenho inferior ao do *Grid Filter*, ultrapassando, porém, os resultados do equalizador linear MMSE. Isto pode ser justificado pois, apesar de o algoritmo baseado em filtro de partículas ser *cego*, ou seja, não conhecer os parâmetros exatos do canal, o mesmo aproxima a solução MAP, que é muito distinta da provida pelo equalizador MMSE. Vale ressaltar que o desempenho de técnicas de equalização baseadas em estimação linear (e.g., algoritmos LMS, RLS, CMA [8]) é limitado pelo desempenho do equalizador MMSE.

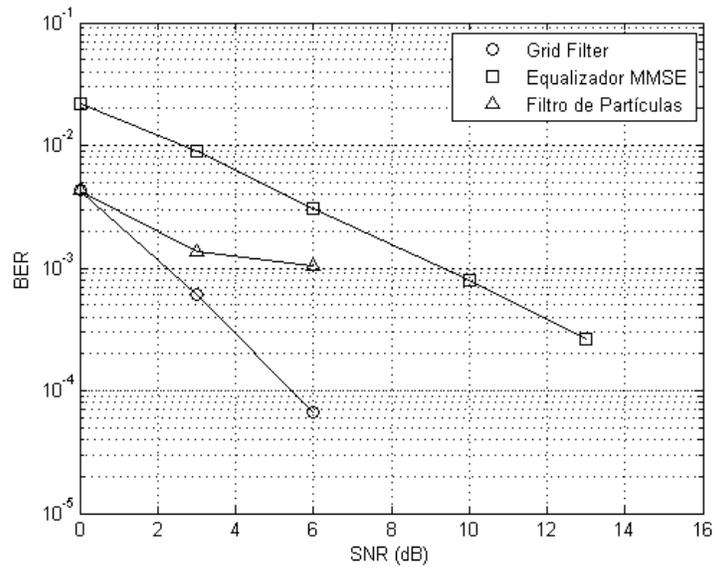


Figura 5.4: Comparação dos Resultados para o caso em que o ruído é correlacionado e a equalização supõe ruído correlacionado

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido um novo algoritmo para equalização cega de canais de comunicação SIMO sob ruído correlacionado baseado em filtros de partículas. A correlação entre as amostras de ruído emerge ao se efetuar a sobreamostragem do sinal medido na saída do filtro casado da Figura 1.2, e não pode ser evitada caso o pulso utilizado satisfaça o critério de Nyquist. O desempenho do algoritmo desenvolvido foi avaliado em diversos cenários e comparado ao de métodos de equalização baseados no *Grid Filter* e no Filtro de Wiener (MMSE).

Através de simulações numéricas, observou-se que o método cego proposto tem um desempenho superior ao do equalizador linear treinado, às custas, porém, de uma complexidade computacional mais elevada. Observou-se, também, que eventuais descasamentos entre o modelo de sinal suposto pelo receptor e o efetivamente utilizado na geração do sinal impactam significativamente no desempenho dos equalizadores, o que justifica o aumento da complexidade computacional dos algoritmos que adotam o modelo correto.

# Referências Bibliográficas

- [1] E. Puskaya, “Sequential monte carlo methods for digital communications,” Ph.D. thesis, Cambridge University Engineering Department, Cambridge, U.K., 2003.
- [2] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2000.
- [3] Z. Ding and Y. Li, *Blind Equalization and Identification*, ser. Signal Processing and Communications. Boca Raton, FL: CRC Press, 2001.
- [4] E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, and S. Mayrargue, “Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR Filters,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 2, pp. 516–525, 1995.
- [5] A. Doucet, A. Smith, N. de Freitas, and N. Gordon, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, ser. Information Science and Statistics. New York: Springer, 2010.
- [6] J. Míguez and P. M. Djurić, “Blind Equalization of Frequency-Selective Channels by Sequential Importance Sampling,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, no. 10, pp. 2738–2748, Oct. 2004.
- [7] C. J. Bordin and M. G. S. Bruno, “Particle Filters for Joint Blind Equalization and Decoding in Frequency-Selective Channels,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 6, pp. 2395–2405, Jun. 2008.
- [8] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. New York: John Wiley & Sons, 2011.
- [9] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp, “A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 2, pp. 174–188, 2002.

- [10] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2009.
- [11] S. M. Kay, *Modern spectral estimation*. Pearson Education India, 1988.
- [12] P. A. Devijver, “Baum’s forward-backward algorithm revisited,” *Pattern Recognition Letters*, vol. 3, no. 6, pp. 369–373, 1985.
- [13] T. Clapp, “Statistical methods for the processing of communications data,” Ph.D. dissertation, Univ. Cambridge, Cambridge, U.K., 2000.
- [14] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu, “On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering,” *Statist. Comput.*, vol. 10, no. 3, pp. 197–208, Jul. 2000.
- [15] J. S. Liu and R. Chen, “Blind Deconvolution via Sequential Imputations,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 90, no. 430, pp. 567–576, 1995.

# Apêndice A

## Filtro de Kalman

Neste apêndice<sup>1</sup> são deduzidas as equações do Filtro de Kalman pela via Bayesiana, das quais se fez uso no Capítulo 4. Para isto, considere o seguinte modelo que relaciona o estado  $H_n$ , de dimensão  $RL \times 1$  à observação  $y_n$ , de dimensão  $R \times 1$

$$H_n = F_n H_{n-1} + u_n, \quad (\text{A.1})$$

$$y_n = X_n^T H_n + v_n, \quad (\text{A.2})$$

em que  $u_n \sim \mathcal{N}(0; Q_n)$ ,  $v_n \sim \mathcal{N}(0; \Xi)$  e  $F_n$  e  $X_n$  são matrizes determinísticas conhecidas.

Deseja-se, para o modelo considerado, determinar a f.d.p. *a posteriori*  $p(H_n | X_{0:n}, y_{0:n})$ , que reúne toda a informação a respeito de  $H_n$  disponibilizada pela sequência de observações  $y_{0:n}$ . Para tal finalidade, observe inicialmente que

$$p(H_n | X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{RL}} p(H_n, H_{n-1} | X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) dH_{n-1} \quad (\text{A.3})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{RL}} p(H_n | H_{n-1}, X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) p(H_{n-1} | X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) dH_{n-1} \quad (\text{A.4})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{RL}} p(H_n | H_{n-1}) p(H_{n-1} | X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) dH_{n-1}, \quad (\text{A.5})$$

sendo a última igualdade decorrente do fato de que  $H_n$  é independente de  $X_{0:n}$  dado

---

<sup>1</sup>Por clareza, omite-se neste Apêndice o sobrescrito  $p$  que indica o índice da partícula associada a cada grandeza.

$H_{n-1}$ . Note, adicionalmente, que

$$p(H_n|X_{0:n}, y_{0:n}) = \frac{p(H_n, X_n, y_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})}{p(X_n, y_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})} \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{p(H_n, X_n, y_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})}{\int_{\mathbb{R}^{RL}} p(H_n, X_n, y_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) dH_n} \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{p(y_n|H_n, X_{0:n}, y_{0:n-1})p(X_n|H_n, X_{0:n-1}, y_{0:n-1})p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})}{\int_{\mathbb{R}^{RL}} p(y_n|H_n, X_{0:n}, y_{0:n-1})p(X_n|H_n, X_{0:n-1}, y_{0:n-1})p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) dH_n} \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{p(y_n|H_n, X_n)p(X_n|X_{n-1})p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})}{\int_{\mathbb{R}^{RL}} p(y_n|H_n, X_n)p(X_n|X_{n-1})p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) dH_n} \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{p(y_n|H_n, X_n)p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})}{\int_{\mathbb{R}^{RL}} p(y_n|H_n, X_n)p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) dH_n} \quad (\text{A.10})$$

em que a simplificação de (A.8) para (A.9) se deve a relações de independência condicional induzidas pelo modelo de evolução temporal de  $H_n$ .

Suponha agora, como passo de indução, que  $p(H_{n-1}|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})$  seja uma f.d.p. Gaussiana, ou seja,  $p(H_{n-1}|X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) = \mathcal{N}(H_{n-1}|\bar{H}_{n-1}; \Sigma_{n-1})$ . Note que esta hipótese pode ser observada trivialmente para  $n = 1$  supondo-se que  $H_0$  é um vetor aleatório Gaussiano *a priori*, isto é,  $p(H_0) = \mathcal{N}(H_0|\bar{H}_0; \Sigma_0)$ .

Como consequência da hipótese de indução, segue que

$$p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{RL}} \mathcal{N}(H_n|F_n H_{n-1}; Q_n) \mathcal{N}(H_{n-1}|\bar{H}_{n-1}; \Sigma_{n-1}) dH_{n-1}. \quad (\text{A.11})$$

Para prosseguir com o cálculo de  $p(H_n|X_{0:n-1}, y_{0:n-1})$ , será utilizado o seguinte teorema.

**Teorema 1.** *Pode-se mostrar que*

$$\mathcal{N}(c|Ab; C) \mathcal{N}(b|\bar{b}; B) = \mathcal{N}(c|A\bar{b}; C + ABA^T) \mathcal{N}(b|\tilde{b}; \tilde{B}), \quad (\text{A.12})$$

em que  $\tilde{b}$  e  $\tilde{B}$  são dados, respectivamente, pelas Equações (A.21) e (A.20).

*Demonstração.* Observe inicialmente que

$$\mathcal{N}(c|Ab; C) \mathcal{N}(b|\bar{b}; B) = (2\pi)^{-\frac{n_B+n_C}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} |C|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\Delta}{2} \right\}, \quad (\text{A.13})$$

em que  $n_B$  e  $n_C$  denotam, respectivamente, as dimensões dos vetores  $b$  e  $c$ , e

$$\Delta = (c - Ab)^T C^{-1} (c - Ab) + (b - \bar{b})^T B^{-1} (b - \bar{b}). \quad (\text{A.14})$$

Deseja-se manipular  $\Delta$  de forma a isolar  $b$  em uma forma quadrática. Para isto, note que

$$\Delta = b^T (A^T C^{-1} A + B^{-1}) b - 2(c^T C^{-1} A + b^T B^{-1}) b + c^T C^{-1} c + \bar{b}^T B^{-1} \bar{b} \quad (\text{A.15})$$

$$\equiv (b - \tilde{b})^T \tilde{B}^{-1} (b - \tilde{b}) + \Lambda \quad (\text{A.16})$$

$$= b^T \tilde{B}^{-1} b - 2\tilde{b}^T \tilde{B}^{-1} b + \tilde{b}^T \tilde{B}^{-1} \tilde{b} + \Lambda, \quad (\text{A.17})$$

em que  $\Lambda$ , por definição, não é função de  $b$ . Disto, conclui-se que

$$\tilde{B}^{-1} = A^T C^{-1} A + B^{-1}, \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{b}^T \tilde{B}^{-1} = c^T C^{-1} A + b^T B^{-1}. \quad (\text{A.19})$$

Aplicando o Lema de Inversão de Matrizes a (A.18), segue que

$$\tilde{B} = B - BA^T (ABA^T + C)^{-1} AB. \quad (\text{A.20})$$

Multiplicando (A.19) por (A.20) à direita, obtém-se, após manipulações algébricas, que

$$\tilde{b} = \bar{b} + BA^T (ABA^T + C)^{-1} [c - A\bar{b}]. \quad (\text{A.21})$$

Substituindo as expressões de  $\tilde{b}$  e  $\tilde{B}$  em (A.16), conclui-se, após extensas manipulações, que

$$\Lambda = (c - A\bar{b})^T (ABA^T + C)^{-1} (c - A\bar{b}). \quad (\text{A.22})$$

Em conclusão, deduziu-se que

$$\Delta = (c - A\bar{b})^T (ABA^T + C)^{-1} (c - A\bar{b}) + (b - \tilde{b})^T \tilde{B}^{-1} (b - \tilde{b}). \quad (\text{A.23})$$

Substituindo-se (A.23) em (A.13), resulta que

$$\mathcal{N}(c|Ab; C) \mathcal{N}(b|\bar{b}; B) = \frac{|ABA^T + C|^{\frac{1}{2}} |\tilde{B}|^{\frac{1}{2}}}{|B|^{\frac{1}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \mathcal{N}(c|A\bar{b}; C + ABA^T) \mathcal{N}(b|\tilde{b}; \tilde{B}). \quad (\text{A.24})$$

Ocorre porém que

$$\begin{aligned} \frac{|ABA^T + C|^{\frac{1}{2}} |\tilde{B}|^{\frac{1}{2}}}{|B|^{\frac{1}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} &= \frac{|ABA^T + C|^{\frac{1}{2}}}{|B|^{\frac{1}{2}} |C|^{\frac{1}{2}} |B^{-1} + A^T C^{-1} A|^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{|I + ABA^T C^{-1}|^{\frac{1}{2}}}{|I + B^{-1} A^T C^{-1} A|^{\frac{1}{2}}} = \frac{|A + ABA^T C^{-1} A|^{\frac{1}{2}}}{|A + ABA^T C^{-1} A|^{\frac{1}{2}}} = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Substituindo o resultado de (A.25) em (A.24) leva ao resultado do teorema.  $\square$

Utilizando o Teorema 1, pode-se reescrever (A.11) como

$$p(H_n | X_{0:n-1}, y_{0:n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{RL}} \mathcal{N}(H_n | F_n \bar{H}_{n-1}; Q_n + F_n^T \Sigma_{n-1} F_n) \mathcal{N}(H_{n-1} | \tilde{H}_{n-1}; \tilde{\Sigma}_{n-1}) dH_{n-1} \quad (\text{A.26})$$

$$= \mathcal{N}(H_n | F_n \bar{H}_{n-1}; Q_n + F_n^T \Sigma_{n-1} F_n), \quad (\text{A.27})$$

$$\triangleq \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_{n|n-1}; \Sigma_{n|n-1}), \quad (\text{A.28})$$

pois  $\tilde{H}_{n-1}$  e  $\tilde{\Sigma}_{n-1}$  não são funções de  $H_{n-1}$ .

Substituindo (A.28) em (A.9), resulta em

$$p(H_n | X_{0:n}, y_{0:n}) = \frac{\mathcal{N}(y_n | X_n^T H_n; \Xi) \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_{n|n-1}; \Sigma_{n|n-1})}{\int_{\mathbb{R}^{RL}} \mathcal{N}(y_n | X_n^T H_n; \Xi) \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_{n|n-1}; \Sigma_{n|n-1}) dH_n} \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{\mathcal{N}(y_n | X_n^T \bar{H}_{n|n-1}; \Xi + X_n^T \Sigma_{n|n-1} X_n) \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_n; \Sigma_n)}{\int_{\mathbb{R}^{RL}} \mathcal{N}(y_n | X_n^T \bar{H}_{n|n-1}; \Xi + X_n^T \Sigma_{n|n-1} X_n) \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_n; \Sigma_n) dH_n} \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{\mathcal{N}(y_n | X_n^T \bar{H}_{n|n-1}; \Xi + X_n^T \Sigma_{n|n-1} X_n) \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_n; \Sigma_n)}{\mathcal{N}(y_n | X_n^T \bar{H}_{n|n-1}; \Xi + X_n^T \Sigma_{n|n-1} X_n)} \quad (\text{A.31})$$

$$= \mathcal{N}(H_n | \bar{H}_n; \Sigma_n), \quad (\text{A.32})$$

em que, empregando (A.21) e (A.20), obtêm-se

$$\bar{H}_n = \bar{H}_{n|n-1} + \Sigma_{n|n-1} X_n [X_n^T \Sigma_{n|n-1} X_n + \Xi]^{-1} [y_n - X_n^T \bar{H}_{n|n-1}], \quad (\text{A.33})$$

$$\Sigma_n = \Sigma_{n|n-1} - \Sigma_{n|n-1} X_n [X_n^T \Sigma_{n|n-1} X_n + \Xi]^{-1} X_n^T \Sigma_{n|n-1}. \quad (\text{A.34})$$

O resultado da Equação A.32 implica, pelo Princípio da Indução Finita, que  $p(H_n|X_{0:n}, y_{0:n})$  é Gaussiana para todo  $n$ .